

1. はじめに

航空機が変状のある舗装を高速走行する時、制動・曲線走行・着陸する時には、空港舗装は静止時よりも大きな荷重を受けることが懸念される。そのため、航空機地上走行時の運動特性の解明、航空機走行時に舗装構造に加えられる荷重特性の解明、そしてこの荷重に対する舗装構造の動的力学特性の解明が急務となっている。

一方、舗装構造の非破壊評価方法として、舗装に動的（衝撃）荷重を加え、その応答をたわみとして計測するFWD（Falling Weight Deflectometer）が近年多く用いられている。その解析法としては、測定たわみに対して逆解析手法を用いることにより弾性係数を算出する方法が一般的である。さらに、最近では、従来用いられてきた準静的逆解析のみならず、動的逆解析プログラムを用いた弾性係数の推定も行われるようになってきている。しかし、後者の動的解析法の研究は緒についたばかりである。

そこで、本研究では、空港アスファルト舗装を対象とし、まず、FWD試験や航空機荷重載荷時の舗装構造の応答を解明するために必要となる、三次元有限要素法による効率的な順解析と逆解析プログラムを開発した。そして、航空機の走行時を想定した、移動輪荷重に対する空港舗装の応答解析法についても検討した。

本資料は、その成果を取りまとめたものであり、次の項目について詳述している。

- (1) 三次元有限要素法を用いた舗装構造の静的逆解析
- (2) 動的荷重を受ける舗装構造の効率的有限要素法解析と逆解析
- (3) 移動荷重に対する舗装構造の応答解析

2. 三次元有限要素法を用いた舗装構造の静的逆解析

空港舗装の荷重応答解析においては、舗装構造モデルと材料特性の選定が重要である。後者はFWDによる測定結果を逆解析することによって求められることが多く、ほとんど多層弾性理論が使用されている。境界条件の制約等によりこの理論が用いられないときには三次元有限要素法といったものによらざるを得ないが、この場合従来より用いられている静的逆解析手法の信頼性が十分であると考えられることから、ここでもそれを踏襲して、三次元有限要素法による効率的な静的逆解析手法を採用している。

2.1 感度解析

解析範囲を広く採る場合、三次元有限要素法においてはたわみ感度解析を可能な限り効率的に行うことが肝要である。ここでは、次のような4種類のアルゴリズムを用いた。

(1) 差分法

静的舗装構造解析においては次の線形つり合い方程式を解く必要がある。

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2-1)$$

ここに、 \mathbf{K} は全体剛性マトリックス、 \mathbf{u} は未知変位ベクトル、 \mathbf{f} は作用荷重ベクトルである。

差分法では、 m 層構造物の場合に計算を $(m+1)$ 回繰り返す必要がある。変位の微分 $\partial u_i / \partial E_j$ は次式により計算できる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial E_j} = \frac{u_i(E_1, \dots, E_j + \Delta E_j, \dots, E_m) - u_i(E_1, \dots, E_j, \dots, E_m)}{\Delta E_j} \quad (2-2)$$

ここに、 E_j は j 層の弾性係数、 ΔE_j は j 層の弾性係数増分である。

(2) 直接微分法

静的舗装構造解析の場合、荷重ベクトルは舗装各層の弾性係数に独立である（ $\partial \mathbf{f} / \partial E_j = 0$ ）。変位の微分 $\partial u_i / \partial E_j$ は式(2-1)をパラメータ E_j で直接微分すると得られる。

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial E_j} = - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial E_j} \mathbf{u} \quad (2-3)$$

式(2-3)と(2-1)を比べると、同じ方程式の解法を適用して $\partial u_i / \partial E_j$ は容易に得られる。

(3) 反復法

この方法は直接微分法と同程度に効率的であるが、以下のようにして改善できる。微小弾性係数変動 ΔE_j により剛性マトリックスは $\Delta \mathbf{K}$ だけ変化させること、有限要素方程式(2-1)は次のように書き換えられる。

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} - \Delta \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (2-4)$$

この式は繰返し計算により解くことができ、次式が得られる。

$$\mathbf{K}\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{f} - \Delta \mathbf{K}\mathbf{u}^k \quad (2-5)$$

ここに、 \mathbf{u}^{k+1} は繰返し回数 $k+1$ のときの \mathbf{u} を意味する。

(4) 基底縮小法

直接微分法と反復法は有効であるが、層数が多い場合には多くの計算時間を必要とする。本方法はこの点を改善するものである。(2-4)式の変位ベクトル \mathbf{u} は次式により得られる。

$$\mathbf{u} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{K})^{-1}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} \quad (2-6)$$

この場合、次式が満足される必要がある。

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} \quad (2-7)$$

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}^{-1}(\Delta\mathbf{K}\mathbf{u}_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, m \quad (2-8)$$

\mathbf{K} が既知であれば(2-6)式中の \mathbf{u} は容易に解くことができる。基底縮小法は(2-4)式を解くために用いられ、以下の変位変換に基づいている。

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m \mathbf{r}_i y_i = \mathbf{R}\mathbf{y} \quad (2-9)$$

ここに、 \mathbf{y} は未知数 m のベクトルで、 \mathbf{R} は次式で定義される $n \times m$ マトリックスである。

$$\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \dots \ \mathbf{r}_m] \quad (2-10)$$

(2-9)式を(2-4)式に代入して、 \mathbf{R}^T を乗ずると未知ベクトル \mathbf{y} に関して次式が得られる。

$$\mathbf{K}^* \mathbf{y} = \mathbf{f}^* \quad (2-11)$$

ここに、

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{R}^T(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{R}, \quad \mathbf{f}^* = \mathbf{R}^T\mathbf{f} \quad (2-12)$$

漸化式は次のようになる。

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_i = -\Delta\mathbf{K}\mathbf{u}_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n_j \quad (2-13)$$

Gram-Schmidt¹⁾直交化法と正規化法を用いることにより、マトリックス \mathbf{R} を求めることができる。1次のベクトル \mathbf{r}_1 は次式が得られる。

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_1 = \mathbf{f} \quad (2-14)$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{u}_1 / [\mathbf{u}_1^T(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{u}_1]^{1/2} \quad (2-15)$$

2次以降のベクトル \mathbf{r}_i は以下の方程式で得られる。

$$\mathbf{u}_i^* = \mathbf{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} [\mathbf{r}_j^T(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{u}_i] \mathbf{r}_j \quad (2-16)$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{u}_i^* / [\mathbf{u}_i^{*T}(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{u}_i^*]^{1/2}, \quad i = 2, 3, \dots, n_j \quad (2-17)$$

結局、変位 \mathbf{u} は次式により評価できる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{y} = \mathbf{R}(\mathbf{R}^T\mathbf{f}) \quad (2-18)$$

2.2 逆解析のアルゴリズム

FWD試験において、各たわみセンサーでの測定値と計算値の誤差は、次式の非線形最小二乗形式の目的関数により評価される。

$$J(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{u_i^* - u_i(\mathbf{E})\}^2 \quad (2-19)$$

ここで、

n : センサー数

u_i^* , $u_i(\mathbf{E})$: センサー i における測定値, 計算値

$\mathbf{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}^T$: 材料特性値のベクトル

m : 未知層数

Gauss-Newton法²⁾を適用することにより、以下のような方程式に変換される。

$$\mathbf{A}\mathbf{dP} = \mathbf{b} \quad (2-20)$$

ここで、

$$\mathbf{A} = [\mathbf{S}(\mathbf{E})]^T [\mathbf{S}(\mathbf{E})]$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{S}(\mathbf{E})]^T [u^* - u(\mathbf{E})]$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = S_{ij} = \partial u_i / \partial E_j$$

以上で述べた方法を統合することにより、たわみを用いた舗装構造の有限要素法による逆解析手法のアルゴリズムが構築可能となる。

3. 動的荷重を受ける舗装構造の効率的有限要素解析と逆解析

空港舗装の構造解析においては、舗装構造モデルと材料特性として使用するパラメータが重要な要素となっている。この材料特性は、FWDによる測定結果を逆解析することにより得られる。現状で用いられている解析方法静的多層弾性理論であるが、これは実際の舗装の挙動を解析する手法としては不十分であることはいうまでもない。

三次元有限要素法はこのような現象を解析するために有効な手段であるが、その精度を高めるためには、計算時間ばかりではなく、計算機容量も非常に大きなものが必要となる。そこで、ここでは、その問題を解決すべく、計算効率を改善するための計算手法の開発を行った。

3.1 動的解析

動的荷重が作用する構造物の運動方程式は、一般に次式のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) &= \mathbf{F}(s, t) & (3-1) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

ここに、 $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ はそれぞれ $N \times N$ の質量、減衰、剛性マトリックス、そして $\ddot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{u}(t)$ は $N \times 1$ の加速度、速度、変位ベクトルである。また、右辺の $\mathbf{F}(s, t)$ は動的荷重ベクトルである。ここでは、この $\mathbf{F}(s, t)$ について、静的荷重ベクトル $\mathbf{F}(s)$ と時間のスカラー関数 $g(t)$ の積とした、すなわち $\mathbf{F}(s, t) = \mathbf{f}(s)g(t)$ の場合について考える。多点入力でも $g(t)$ が1つの関数で表すことができる場合を包含している。 $g(t)$ が異なるような多点入力の場合、 $\mathbf{F}(s, t) = \sum_i \mathbf{f}_i(s)g_i(t)$ として個々の $\mathbf{f}_i(s)$ に対してRitzベクトルを求め、個々の荷重ベクトルによる応答解析を行い、その結果を足し合わせることになる。

一般に数値解析法を用いて式(3-1)を解くことが行なわれるが、マトリックスが大きいと計算時間は膨大なものとなる。そこでWilson等³⁾はRayleigh型減衰マトリックスを有する運動方程式に対してRitzベクトルを誘導している。しかし、この方法は、マトリックスが大きくなり、計算効率が悪くなるだけでなく、理論的にも複雑である。

そこで、本研究では、Wilson等の方法を非比例減衰システムに適用して縮小した運動方程式を1階微分方程式に変換し、固有値解析を行なって解析的に解を誘導している。以下にその方法について述べる。

(1) 運動方程式の縮小化

Ritzベクトルを用いて座標変換を行ない、式(3-1)の解 $\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \ddot{\mathbf{u}}(t)$ の近似値をそれぞれ $\tilde{\mathbf{u}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{u}}}(t), \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}(t)$ とすると、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(t) &= \sum_{i=1}^L \mathbf{r}_i z_i(t) = \mathbf{R}\mathbf{z}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{u}}}(t) &= \sum_{i=1}^L \mathbf{r}_i \dot{z}_i(t) = \mathbf{R}\dot{\mathbf{z}}(t) \\ \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}(t) &= \sum_{i=1}^L \mathbf{r}_i \ddot{z}_i(t) = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}}(t) \end{aligned} \quad (3-2)$$

ここに、 $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_L]$ はRitzベクトルからなる $N \times L$ のマトリックス、 $\mathbf{z}(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_L(t)]^T$ は縮小したシステムの一般座標系ベクトルである。

式(3-2)を式(3-1)に代入し、前から \mathbf{R}^T を掛けると、式(3-1)はRitz変位座標系 $\mathbf{z}(t)$ を用いて次式のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{z}(t) &= \mathbf{f}^* g(t) & (3-3) \\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{z}}(0) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

ただし

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R}, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{R}^T \mathbf{C} \mathbf{R}, \quad \mathbf{K}^* = \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{R}, \quad \mathbf{f}^* = \mathbf{R}^T \mathbf{f} \quad (3-4)$$

式(3-3)の $\dot{\mathbf{z}}(t), \ddot{\mathbf{z}}(t)$ はそれぞれ縮小したシステムの速度および加速度ベクトルである。また、 $\mathbf{M}^*, \mathbf{C}^*, \mathbf{K}^*$ はそれぞれ縮小したシステムの質量、減衰、剛性マトリックスであり、その大きさはいずれも $L \times L$ のマトリックスであり、 \mathbf{f}^* は縮小したシステムの荷重ベクトルである。一般に、Ritzベクトルを用いて変換した縮小マトリックス \mathbf{M}^* は単位マトリックスとなるが、 \mathbf{C}^* と \mathbf{K}^* は対称マトリックスとなるものの、対角マトリックスではない。

Ritzベクトルを作成するアルゴリズムはRayleigh-Ritz法と静的修正法を組み合わせている。Ritzベクトルを作成するアルゴリズムは文献³⁾に詳述している。

(2) 縮小運動方程式の解法

縮小運動方程式(3-3)はNewmark β 法⁴⁾あるいはモード合成法を用いて解くことができる。Rayleigh減衰のような比例減衰を仮定すると、 \mathbf{K}^* と \mathbf{M}^* の固有値と固有ベクトルを用いることにより式(3-3)を分離できる。しかし、式(3-1)の減衰マトリックス \mathbf{C} がRayleigh型でないとき、

\mathbf{C}^* は \mathbf{M}^* と \mathbf{K}^* の線形結合で表すことはできない。この場合、式(3-3)の2階微分方程式を次のように1階微分方程式に書き換える。

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{f}_0(t) \quad (3-5)$$

ここに、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}^* \\ \mathbf{M}^* & \mathbf{C}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^* \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_0(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}^* g(t) \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

$\mathbf{M}^*, \mathbf{C}^*, \mathbf{K}^*$ は対称であるので、式(3-6)の \mathbf{A} と \mathbf{B} は $2L \times 2L$ の対称マトリックスである。また、 $\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, \mathbf{f}_0$ はそれぞれ $2L \times 1$ のベクトルである。式(3-5)は複素数モード合成法を用いて解くことができる。

a) 縮小システムの固有値と固有ベクトル⁵⁾

式(3-5)の同次方程式の基本解を求める。右辺をゼロベクトルとして、 s 次のモードに対する解 $\mathbf{y}_s = \mathbf{v}_s e^{\lambda_s t}$ を代入すると、

$$(\lambda_s \mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{v}_s = \mathbf{0} \quad (3-8)$$

を得る。この式は固有値問題を表しており、 λ_s 、 \mathbf{v}_s ($s=1, 2, \dots, 2L$) はそれぞれ固有値と固有ベクトルである。これらの固有値、固有ベクトルはいずれも一般に複素数となる。 \mathbf{v}_s は変位モードと速度モードからなる s 次のベクトルであるので、固有値と変位モードを用いて、

$$\mathbf{v}_s = \begin{bmatrix} \lambda_s \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

ここに、 \mathbf{u}_s は s 次の変位モードである。 \mathbf{A}, \mathbf{B} は実マトリックスであるので、固有値、固有ベクトルは共役になっており、 λ_s の共役を $\bar{\lambda}_s$ 、 \mathbf{u}_s の共役を $\bar{\mathbf{u}}_s$ で表すことにする。固有値 λ_s の実部と虚部をそれぞれ λ_s^R と λ_s^I で表すと、 s 次の円振動数 ω_s とモード減衰 ξ_s は次式の関係満足する。

$$\lambda_s = -\omega_s \left(\xi_s + i\sqrt{1 - \xi_s^2} \right) \quad (3-10)$$

$$\omega_s = \sqrt{(\lambda_s^R)^2 + (\lambda_s^I)^2} = |\lambda_s| \quad (3-11)$$

$$\xi_s = -\frac{\lambda_s^R}{|\lambda_s|} \quad (3-12)$$

固有ベクトル \mathbf{v}_s の \mathbf{A}, \mathbf{B} に関する直交性より、 s 次のモードと r 次のモードの間には次のような関係が存在する。

$$\mathbf{v}_r^T \mathbf{A} \mathbf{v}_s = \begin{cases} A_s & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases} \quad (3-13)$$

$$\mathbf{v}_r^T \mathbf{B} \mathbf{v}_s = \begin{cases} B_s & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases} \quad (3-14)$$

$r \neq s$ の場合について、式(3-13), (3-14)を $\mathbf{M}^*, \mathbf{C}^*, \mathbf{K}^*, \mathbf{u}_s$ を用いて書き換える、

$$(\lambda_r + \lambda_s) \mathbf{u}_r^T \mathbf{M}^* \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_r^T \mathbf{C}^* \mathbf{u}_s = 0 \quad (3-15)$$

$$\lambda_r \lambda_s \mathbf{u}_r^T \mathbf{M}^* \mathbf{u}_s - \mathbf{u}_r^T \mathbf{K}^* \mathbf{u}_s = 0 \quad (3-16)$$

λ_r 、 \mathbf{u}_r をそれぞれ λ_s と \mathbf{u}_s の共役とすると、 $\lambda_r = \bar{\lambda}_s$ 、 $\mathbf{u}_r = \bar{\mathbf{u}}_s$ である。この関係を式(3-15), (3-16)に代入して、整理すると、

$$\omega_s^2 = \frac{\bar{\mathbf{u}}_s^T \mathbf{K}^* \mathbf{u}_s}{\bar{\mathbf{u}}_s^T \mathbf{M}^* \mathbf{u}_s} \quad (3-17)$$

$$\xi_s = \frac{1}{2\omega_s} \frac{\bar{\mathbf{u}}_s^T \mathbf{C}^* \mathbf{u}_s}{\bar{\mathbf{u}}_s^T \mathbf{M}^* \mathbf{u}_s} \quad (3-18)$$

上式から計算した ω_s と ξ_s は実数となる。

b) 外力の作用による応答計算

縮小した式(3-5)を解いて動的応答を計算するためモード合成法を用いると、 $\mathbf{y}(t)$ は固有ベクトルを用いて次のように書くことができる。

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{s=1}^{2L} \mathbf{v}_s r_s(t) \quad (3-19)$$

式(3-19)を式(3-5)に代入し、前から \mathbf{v}_s^T を掛け、固有ベクトル \mathbf{v}_s の \mathbf{A}, \mathbf{B} に関する直交性を用いると、

$$A_s \dot{r}_s(t) + B_s r_s(t) = g_s(t) \quad (3-20)$$

$$A_s = \mathbf{v}_s^T \mathbf{A} \mathbf{v}_s = 2\lambda_s \mathbf{u}_s^T \mathbf{M}^* \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_s^T \mathbf{C}^* \mathbf{u}_s \quad (3-21)$$

$$B_s = \mathbf{v}_s^T \mathbf{B} \mathbf{v}_s = -\lambda_s^2 \mathbf{u}_s^T \mathbf{M}^* \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_s^T \mathbf{K}^* \mathbf{u}_s \quad (3-22)$$

$$g_s(t) = \mathbf{v}_s^T \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{u}_s^T \mathbf{f}^* g(t) \quad (3-23)$$

同様に、式(3-8)に前から \mathbf{v}_s^T を掛けて固有ベクトルの直交性を考慮すると、

$$\lambda_s A_s + B_s = 0 \quad (3-24)$$

式(3-20)と式(3-24)より、次のような1階微分方程式が得られる。

$$\dot{r}_s(t) - \lambda_s r_s(t) = \frac{g_s(t)}{A_s} \quad (3-25)$$

式(3-25)の解を時間域 t_0 と t の間で書くと次のようになる。

$$r_s(t) = \frac{e^{\lambda_s t}}{A_s} \int_{t_0}^t e^{-\lambda_s \tau} g_s(\tau) d\tau + c_s e^{\lambda_s t} \quad (3-26)$$

積分定数 c_s は時間 t_0 における $r_s(t)$ の初期条件から決定する。今この初期条件を $r_s(t_0)$ とすると、

$$c_s = r_s(t_0) e^{-\lambda_s t_0} \quad (3-27)$$

初期条件を式(3-26)に代入すると、

$$r_s(t) = \frac{1}{A_s} \int_{t_0}^t e^{\lambda_s(t-\tau)} g_s(\tau) d\tau + r_s(t_0) e^{\lambda_s(t-t_0)} \quad (3-28)$$

時間 t_n と $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ の間で $g_s(\tau)$ を線形で表すことができる。すると、

$$g_s(\tau) = \frac{g_s(t_{n+1}) - g_s(t_n)}{\Delta t} (\tau - t_n) + g_s(t_n) \quad (3-29)$$

$\tau' = \tau - t_n$ とおくと、式(29)は、

$$g_s(\tau' + t_n) = \frac{g_s(t_{n+1}) - g_s(t_n)}{\Delta t} \tau' + g_s(t_n) \quad (3-30)$$

となり、この関係を用いると、

$$r_s(t_{n+1}) = \frac{1}{A_s} \int_0^{\Delta t} e^{\lambda_s(\Delta t - \tau')} g_s(t_n + \tau') d\tau' + r_s(t_n) e^{\lambda_s \Delta t} \quad (3-31)$$

式(3-30)、(3-31)を式(3-28)に代入して積分し、整理すると、

$$r_s(t_{n+1}) = r_s(t_n) e^{\lambda_s \Delta t} + \frac{1}{A_s \lambda_s} \left(e^{\lambda_s \Delta t} + \frac{1}{\lambda_s \Delta t} - \frac{e^{\lambda_s \Delta t}}{\lambda_s \Delta t} \right) g_s(t_n) - \frac{1}{A_s \lambda_s} \left(1 + \frac{1}{\lambda_s \Delta t} - \frac{e^{\lambda_s \Delta t}}{\lambda_s \Delta t} \right) g_s(t_{n+1}) \quad (3-32)$$

式(3-5)の解は、 $t = t_{n+1}$ において次のように書くことができる。

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) = \sum_{s=1}^{2L} \mathbf{v}_s r_s(t_{n+1}) \quad (3-33)$$

式(3-26)の $r_s(t)$ は一般に複素数であるが、固有値、固有ベクトルが共役となるので、 $\mathbf{y}(t)$ は実数ベクトルとなる。 $\mathbf{y}(t)$ を変位成分と速度成分に分解して記すと、

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{s=1}^{2L} \mathbf{u}_s r_s(t) = 2 \sum_{s=1}^L \text{Re}[\mathbf{u}_s r_s(t)] \quad (3-34)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \sum_{s=1}^{2L} \lambda_s \mathbf{u}_s r_s(t) = 2 \sum_{s=1}^L \text{Re}[\lambda_s \mathbf{u}_s r_s(t)] \quad (3-35)$$

加速度応答は、 \mathbf{M}^* が単位マトリックスであることを考慮すると、式(3-3)から

$$\ddot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}^* g(t) - \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{K}^* \mathbf{z}(t) \quad (3-36)$$

$\mathbf{z}(t)$ 、 $\dot{\mathbf{z}}(t)$ 、 $\ddot{\mathbf{z}}(t)$ を計算できると、式(3-2)の関係を用いることにより式(3-1)の応答 $\mathbf{u}(t)$ 、 $\dot{\mathbf{u}}(t)$ 、 $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ の近似解を算出できる。

3.2 動的感度解析

最適設計や逆解析ではしばしば感度解析が必要となる。感度方程式は式(3-1)をパラメータ X_j で偏微分すると得られる。

$$\mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}}{\partial X_j} + \mathbf{C} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial X_j} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_j} = \mathbf{h}_j \quad (3-37)$$

ここに、

$$\mathbf{h}_j = -\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial X_j} \dot{\mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_j} \mathbf{u} \quad j=1, \dots, m \quad (3-38)$$

初期条件は $t=0$ において

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial X_j} = \mathbf{0} \quad (3-39)$$

パラメータ X_j に関する応答の感度は式(3-39)を初期条件として式(3-37)を解くことで得られる。しかし、式(3-1)を解くと同様に計算時間が膨大になるので、Ritzベクトルを用いて感度方程式を縮小して解くのが便利である。感度方程式の右辺は、 $\mathbf{f}(s)\mathbf{g}(t)$ の形に書き換えることが出来ないため、簡単にRitzベクトルを求めることは出来ない。部分空間を張るベクトルの数が増えると計算精度は一般に向上するので、本研究では運動方程式から得られたRitzベクトルを感度方程式にも用いることにする。

式(3-1)のRitzベクトルを用いて式(3-37)を変換すると、縮小した感度方程式は次式のようになる。

$$\mathbf{M}^* \frac{\partial \ddot{\mathbf{z}}}{\partial X_j} + \mathbf{C}^* \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial X_j} + \mathbf{K}^* \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_j} = \mathbf{h}_j^* \quad (3-40)$$

$$\mathbf{h}_j^* = \mathbf{R}^T \mathbf{h}_j$$

初期条件 ($t=0$) は式(3-39)より、

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial X_j} = \mathbf{0} \quad (3-41)$$

式(3-40)の $\mathbf{M}^*, \mathbf{C}^*, \mathbf{K}^*$ は式(3-4)で表すことができる。式(3-40)の解を用いると、式(3-37)の近似解は次式のように書くことができる。

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}}{\partial X_j} = \mathbf{R} \frac{\partial \ddot{\mathbf{z}}}{\partial X_j}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial X_j} = \mathbf{R} \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial X_j}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_j} = \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_j} \quad (3-42)$$

3.3 時間領域での逆解析

舗装各層の弾性係数と減衰係数の逆解析はたわみに注目して非線形最小二乗法により求めている。これは繰り返し計算になるため計算時間は長いものとなる。

誤差の評価関数として、次式で示される時間領域での

平方和を用いている。

$$J(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \int_{t_s}^{t_f} \sum_{i=1}^n \{u_i(\mathbf{P}, t) - u_i^*(t)\}^2 dt \quad (3-43)$$

ここに、

n : 測定されたたわみの個数

$u_i(\mathbf{P}, t), u_i^*(t)$: センサー i での計算, 測定たわみ

\mathbf{P} : 材料パラメータ, $\{\mathbf{P}\} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}^T$

t_s, t_f : 積分時間の上下限。

Gauss-Newton法はこの場合に有効な方法であり、そのアルゴリズムは以下のようになる。

$$A d\mathbf{P} = \mathbf{b} \quad (3-44)$$

ここに、

$$A_{lk} = \int_{t_s}^{t_f} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial P_l} \frac{\partial u_i}{\partial P_k} \right) dt$$

$$b_k = \int_{t_s}^{t_f} \left(\sum_{i=1}^n (u_i - u_i^*) \frac{\partial u_i}{\partial P_k} \right) dt \quad (3-45)$$

$$d\mathbf{P} = \{dP_l\}$$

$d\mathbf{P}$ は特異値分解方法⁹⁾を用いて、 A を分解することにより得られる。

$$A = [\mathbf{V}][\mathbf{D}][\mathbf{V}^T], \quad \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I} \quad (3-46)$$

したがって、 $d\mathbf{P}$ は次のようになる。

$$d\mathbf{P} = \mathbf{V}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}^T \mathbf{b} \quad (3-47)$$

3.4 計算精度の検証

(1) 検証に用いた舗装構造

計算精度を検証するために、図-1のような多層線形構造を用いる。このモデルの断面および各層の弾性係数は、「アスファルト舗装要綱」⁷⁾を参考として決定したD交通相当断面である。物性値は表-1に記した。これらの値は、試験舗装等に対する載荷試験結果を解析すること等により決定した。解析で用いた減衰は、著者等のこれまでの経験から要素剛性マトリックスに0.005を掛けて要素減衰マトリックスとしている。外力は、FWDで計測される荷重を模して、 $g(t)=49\sin^2(25\pi t)$ kNとした。この場合、載荷

時間は $t=0.0\sim 0.04$ 秒とする⁸⁾。動的解析の時間ステップ幅は0.002秒、解析時間は0.06秒としている。各センサー位置におけるたわみを算出し、その結果を図-2に記した。

解析に使用した領域は、解析時間内で動的荷重の波が境界に到達しないような大きさとしており、FEMモデルには反射波を消去するようなダンパーを挿入していない。FEMモデルには20節点アイソパラメトリック要素を用い、その総数は1859、総節点数は8876である。

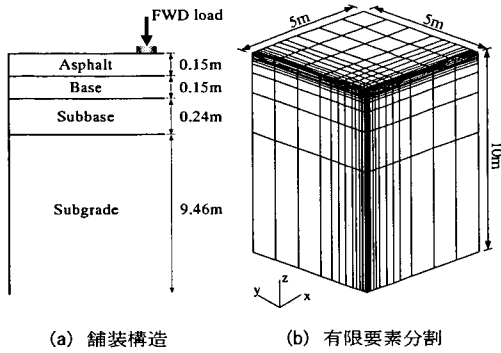


図-1 検証に用いた舗装構造とモデル

表-1 舗装構造層の材料特性

Pavement Layer	Modulus (MPa)	Damping (MNs/m)	Poisson's Ratio	Density (kg/m ³)
Asphalt (E ₁ , C ₁)	5880	29.4	0.35	2300
Base (E ₂ , C ₂)	588	2.94	0.35	1900
Subbase (E ₃ , C ₃)	196	0.98	0.35	1800
Subgrade (E ₄ , C ₄)	98	0.49	0.35	1800

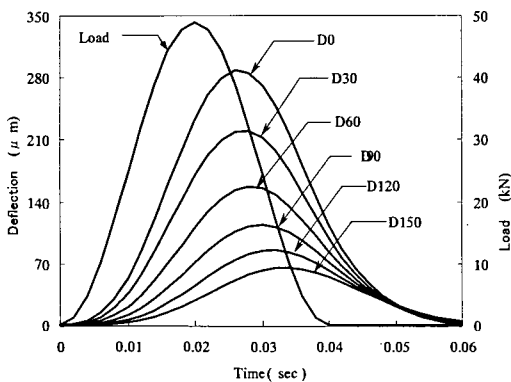


図-2 動的荷重と表面たわみ

(2) 運動方程式の解の精度

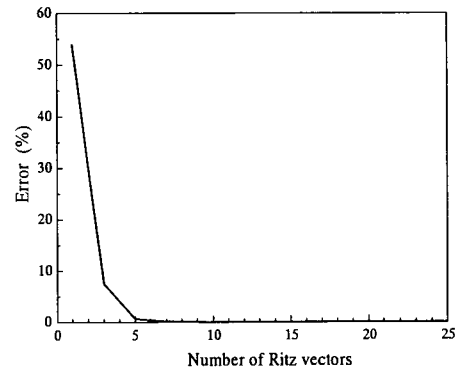
使用するRitzベクトルの個数が多いほど計算精度は良くなる。しかし、個数を多く使用すると、計算時間が長く必要となり、計算効率は悪くなる。そこで使用するRitzベクトルの数と式(3-1)の精度の関係について検討する。ここでは、式(3-1)の精度を次式で評価する。

$$e = \frac{\| \mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t) \|}{\| \mathbf{u}(t) \|} \quad (3-48)$$

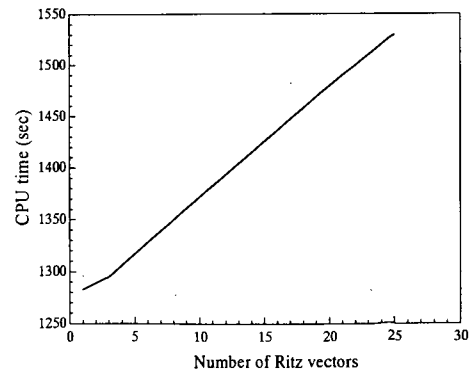
上式の $\mathbf{u}(t)$ はNewmark β 法の変位解析解； $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ はRitz法の変位近似解。誤差関数 $\|\bullet\|$ は次式で定義される。

$$\|\bullet\| = \left(\int_0^T (\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t))^T (\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)) dt \right)^{1/2} \quad (3-49)$$

計算結果を図-3に示す。このFEMモデルの自由度は25000を越えるが、図-3(a)は10個のRitzベクトルを用いると誤差がほぼ0.015%以下であり、精度良く解析できることが明らかである。また、図-3(b)より、計算時間はRitzベクトルの数に比例して増加していることが確認できた。なお、10個のRitzベクトルを用いたときの計算時間は式(3-1)にNewmark β 法を適用した場合と比較して半分以下である。



(a) 誤差



(b) 計算時間

図-3 Ritzベクトル数と誤差・計算時間

(3) 感度方程式の解の精度

式(3-37)をRitzベクトルで縮小化して解く時、使用するRitzベクトルは本来右辺 \mathbf{h}_j を用いて作成する。この場合、 \mathbf{h}_j は $\mathbf{f}(s)g(t)$ の形で表現できないためRitzベクトルを求めることは出来ない。しかし、式(3-1)のRitzベクトルの数を増やすと、部分空間を張るベクトルも増えることになるため、Ritzベクトル数の増加による感度方程式の解の精度の向上程度について検討する。感度解析の精度は式(3-37)を参考として次式で評価する。

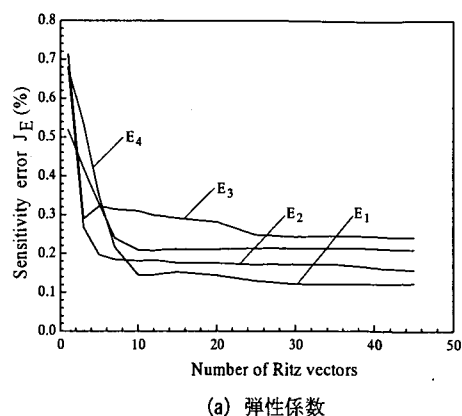
$$J_{X_j} = \left\| \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial X_j} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}(t)}{\partial X_j} \right\| / \left\| \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial X_j} \right\| \quad (3-50)$$

ここに、 $\mathbf{X} = \{X_j\} = (E_1, E_2, E_3, E_4, C_1, C_2, C_3, C_4)^T$ 。
 上式の $\partial \mathbf{u}(t)/\partial X_j$ は式(3-37)をNewmark β 法で解いた変位感度方程式の解であり、 $\partial \tilde{\mathbf{u}}(t)/\partial X_j$ はRitzベクトルを用いて縮小した感度方程式を解析的に解いて求めた近似解である。ここで誤差関数 $\|\cdot\|$ の定義は式(3-49)と同様である。

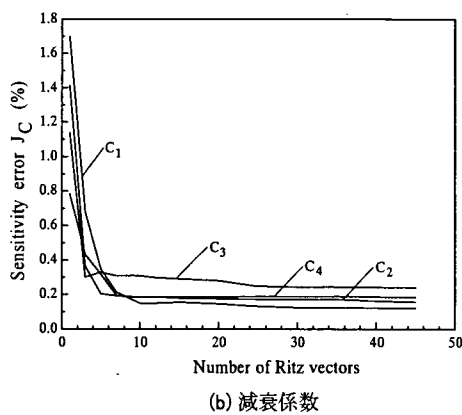
図-4は、図-1に示した舗装構造に対して例題を用いて算出した式(3-50)とRitzベクトルの数の関係を示している。Ritzベクトルの数が少ない範囲では、使用するベクトルの数が増加すると、誤差は急速に減少する。しかし、ベクトルの数が20を超えると誤差の指標値の減少率は非常に小さくなる。この理由は、使用しているRitzベクトルは式(3-1)から求めたものであり、式(3-37)から求めたものでないことによると思われる。しかしながら、使用するRitzベクトルの個数が25を超えると感度解析の精度はほぼ0.1%から0.3%の範囲となっていることから、逆解析時に感度解析を行うことを考えると十分良い精度が得られていると考えられる。このことから、個々の変数の感度方程式に対して、それに対応するRitzベクトルを用いるのではなく、運動方程式のRitzベクトルを用いて感度解析を行っても工学的に十分精度の良いことが明らかになった。

(4) 逆解析結果と Ritz ベクトルの数

Ritzベクトルの数が逆解析結果に及ぼす影響を調べるため、数値シミュレーションを行った。図-2をFWDで測定した表面たわみとみなし、縮小した運動方程式と感度方程式を用いて逆解析を行なった。計算に使用した時間間隔は0.002秒である。逆解析では、減衰は各層で剛性に比例するが、その比の値は各層で異なることを想定している。



(a) 弾性係数



(b) 減衰係数

図-4 Ritzベクトル数と弾性係数・減衰係数

Ritzベクトルの数と逆解析の結果を図-5に示す。図-5の縦軸は逆解析結果/真値である。この逆解析結果から、初期値に関わらず、使用するRitzベクトルの数が30個を超えると真値に収束していることが明らかである。

FEMモデルの自由度が25000であるにもかかわらず、10個のベクトルで精度良い応答結果が得られ、逆解析では25のRitzベクトルで精度良い結果が得られている。その理由は、ここで用いた舗装構造では静的変位のモードと動的変位のモードの差が比較的小さいためであることが考えられる。これは、1次のRitzベクトルは $\mathbf{f}(s)$ に対する静的変位を意味し、2次以降のベクトルは動的応答に対する静的応答の補正量に対応しているため、動的変位が静的変位に近ければ少ない数のRitzベクトルで精度よく近似できると考えられるからである。

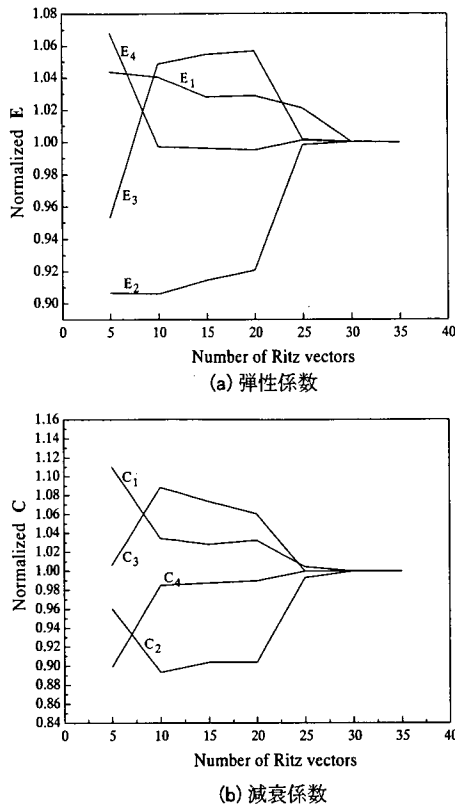


図-5 逆解析におけるRitzベクトル数の影響

なお、逆解析に使用したパーソナルコンピュータ (PC) は、Gateway GP7, 周波数 800MHz, 768Mb メモリである。例題の自由度は11160であり、Ritzベクトルの数と逆解析に要する時間を図-6に示す。逆解析はいずれの場合も10回以内の繰り返し計算回数で収束しており、30個のRitzベクトルを用いても、逆解析に要した時間は約50分である。

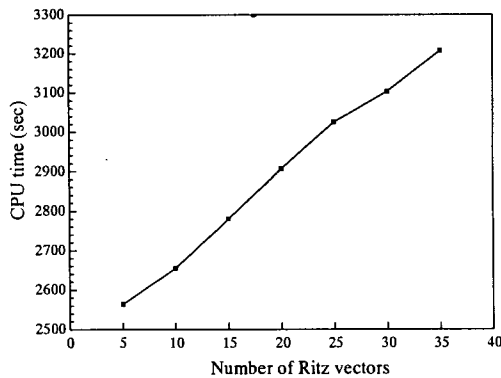


図-6 Ritzベクトル数と計算時間

4. 移動荷重に対する舗装構造の応答解析

近年、大型航空機の離着陸回数が急速に増加しており、滑走路に疲労によるひび割れが発生する傾向が顕著になってきている。1950年代に建設された滑走路には表層が薄いものがあり、荷重領域の外側でも舗装に生じる曲げによりアスファルトコンクリート表面でひび割れが発生したことが報告されている⁹⁾。その後アスファルトコンクリート層を厚くしたところ、下面に引張ひずみによるひび割れが発生した¹⁰⁾。その結果、アスファルトコンクリート下面における水平引張ひずみが設計基準に採用されるようになってきた。このひび割れに対する考え方と線形弾性理論とを用いて設計法が開発されてきた¹¹⁾。しかしながら、この方法は静的解析に基づいており、荷重が走行するという動的な影響を無視している。

この問題に対応すべく、移動する航空機タイヤの作用する要素と節点を効率的に検出し、舗装の挙動を解析できる3次元FEMプログラムを開発している。タイヤ接地圧は表面に鉛直に分布する荷重として処理している。アスファルト混合物は線形弾性と線形粘弾性の材料とし、8節点アイソパラメトリック要素を用いて空港舗装構造をモデル化している。開発したプログラムの特徴は複雑な荷重条件と自由度が70000以上になる大きな問題を、PCを用いて効率的に計算できることである。本章ではこのプログラムを用いて、移動する航空機の輪荷重に対する応答を算出し、移動荷重の速度、アスファルトコンクリート層の厚さ、車輪配置が応答に及ぼす影響について考察した。移動荷重、静的荷重と衝撃荷重の応答を比較した。

4.1 線形弾性の有限要素方程式

移動荷重を受ける舗装構造の動的有限要素解析においては、移動する車輪が舗装のどの位置に作用しているか判断し、関連する要素の節点力に変換することが重要になる。特に、航空機のように荷重個数が多く、しかも走行速度が変化するような場合には解析が容易ではない。図-7は動的応答解析手法のフローである。

自由度 n の舗装構造が移動輪荷重の作用を受けるとき、運動方程式は式(4-1)で表される。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{f(t)\} \quad (4-1)$$

この運動方程式の初期条件は $\{u(0)\} = \{\dot{u}(0)\} = \{0\}$ である。 $[M]$, $[C]$, $[K]$ は、それぞれ質量、減衰、剛性マトリックスである。 $\{\ddot{u}\}$, $\{\dot{u}\}$, $\{u\}$ は、それぞれ加速度、

速度、変位ベクトルであり、 $\{f(t)\}$ は移動車輪により舗装に作用する荷重ベクトルである。

時間領域で動的解析を行う場合、減衰マトリックスに剛性比例型を用いる方法が最も一般である。ここでもそのモデルを用いて、 $[C]=\alpha[K]$ とした。ここで α は減衰の程度を示すパラメータである。

本研究では、Newmark β 法⁴⁾を用いて運動方程式を積分している。時間ステップ $t+\Delta t$ における応答は次の式を解いて求めることができる⁷⁾。

$$[\tilde{K}]\{u\}_{t+\Delta t} = \{\tilde{f}\}_{t+\Delta t} \quad (4-2)$$

ここに、

$$[\tilde{K}] = a_0[M] + (1 + \alpha a_1)[K] \quad (4-3)$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{f}\}_{t+\Delta t} = & \{f\}_{t+\Delta t} + [M](a_0\{u\}_t + a_2\{\dot{u}\}_t + a_3\{\ddot{u}\}_t) \\ & + \alpha[K](a_1\{u\}_t + a_4\{\dot{u}\}_t + a_5\{\ddot{u}\}_t) \end{aligned} \quad (4-4)$$

$$\begin{aligned} a_0 = & 1/(\beta \Delta t^2), \quad a_1 = \delta/(\beta \Delta t), \quad a_2 = 1/(\beta \Delta t), \\ a_3 = & 1/2\beta - 1, \quad a_4 = \delta/\beta - 1, \quad a_5 = (\delta/2\beta - 1)\Delta t, \\ a_6 = & \Delta t(1 - \delta), \quad a_7 = \delta \Delta t \end{aligned} \quad (4-5)$$

式(4-2)を解いて、 $t+\Delta t$ における節点変位を求めると、節点速度と加速度は次の式から計算できる：

$$\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} = a_0(\{u\}_{t+\Delta t} - \{u\}_t) - a_2\{\dot{u}\}_t - a_3\{\ddot{u}\}_t \quad (4-6)$$

$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + a_6\{\ddot{u}\}_t + a_7\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} \quad (4-7)$$

ここに、 Δt は時間きざみであり、数値積分の安定性を重視して $\beta=0.25$ 、 $\delta=0.5$ の値を用いている。移動荷重が作用するとき、荷重の作用位置は時間とともに変化する。したがって、移動荷重を過渡的な節点力で表すことが必要となる。移動荷重が接地面のどの要素表面でも全域に荷重が作用しているような場合は、要素分割はタイヤ幅形状と走行速度を考慮して決めることになり、荷重ベクトルの作成は簡単であるが解析コードとしての柔軟性に欠ける。本研究では図-8のように航空機タイヤの寸法、解析時間刻みおよび移動速度から荷重が全面に作用する要素も部分的に作用する要素もすべて検出し、形

状関数を用いてこれらの要素の節点力に変換している。荷重は一般に複数の要素表面に分布している。荷重の重心位置がどの要素の中にあるのか明らかになると、タイヤ形状から荷重が作用しているすべての要素を決定できる。それぞれの要素で次式により節点力を算定できる。

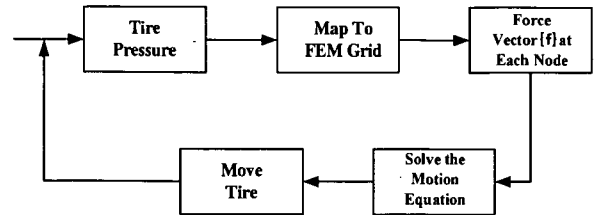


図-7 移動荷重の応答解析手法のフロー

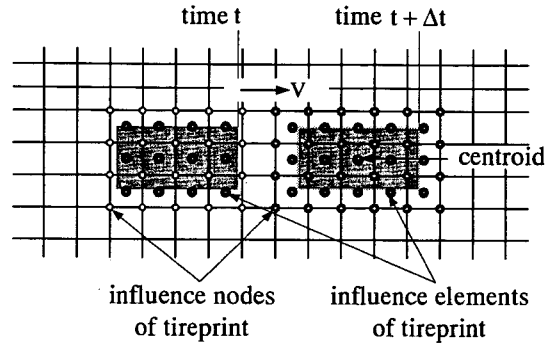


図-8 航空機車輪により影響を受ける要素と節点

$$\{f\}_i^e = \int [N]^T p dS \quad (4-8)$$

ここに、 $[N]$ は形状関数、 p はタイヤ接地圧である。式(4-8)で求めた要素の節点荷重ベクトルを重ね合わせて、時間 t における全体荷重ベクトル $\{f\}_t$ を求める。タイヤ接地圧が作用していない要素の節点力は当然ゼロとなる。

図-8は航空機車輪の影響を受ける要素と節点を示す。図から明らかなように、タイヤ接地圧が全体に作用している要素と、部分的に作用している要素がある。部分的にタイヤ接地圧が作用している要素では、その要素に作用するタイヤ接地圧の合力とその重心を求め、その合力を図-9のように節点力に分散する。時刻 t における全体節点力ベクトル $\{f\}_t$ は要素ベクトルを組み込んで作成される。

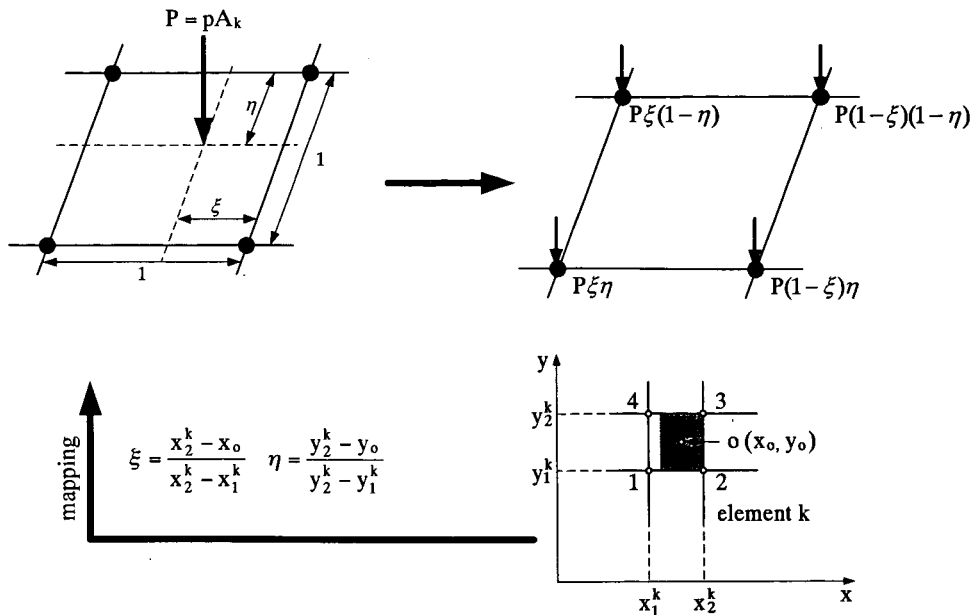


図-9 等価な節点力

4.2 計算手順

移動輪荷重を受ける空港舗装の動的解析においては、Newmark の時間積分法を用いて運動方程式を解いている。積分にあたり時間きざみを一定としている。計算は次の手順で行っている。

- (1) 全体質量マトリックス $[M]$ と剛性マトリックス $[K]$ を計算する。
- (2) 初期速度ベクトル $\{\dot{u}(0)\}$ と変位ベクトル $\{u(0)\}$ を作成し、加速度ベクトル $\{\ddot{u}(0)\}$ を計算する。
- (3) 時間きざみ Δt を選択し、積分定数 a_0 と a_7 を計算する。
- (4) 式(4-3)のマトリックス $[\tilde{K}]$ を作成し、三角化する。
- (5) 時間ステップ $k=1, 2, \dots$ において以下に示す計算を実行する。
 - a) 航空機の速度と加速度により航空機のそれぞれのタイヤ位置 (x_i, y_i) を計算する。
 - b) 舗装とタイヤの接地面が重なる要素と節点番号を検出する。
 - c) 等価な節点力を計算し、重ね合わせを行う。
 - d) 式(4-4)に従い $\{\tilde{f}\}_{i, \Delta t}$ を算出する。
 - e) 時刻を順次変化して式(4-2)を解き、 $\{u\}_{i, \Delta t}$ を計算する。
 - f) 式(4-6), (4-7)より、節点速度および加速度ベクトルを求める。
 - g) 時間範囲の終了まで、上で述べたアルゴリズムを繰り返して計算する。

4.3 数値計算結果

(1) ケーススタディ

図-10に示した空港舗装構造が、一定の速度で移動する輪荷重の作用を受ける場合について解析した。FWD試験を行ない、たわみ形状からLMBS¹²⁾を用いてこの舗装構成層の弾性係数を求めている。この断面の材料特性を表-2に記す。これらの値は試験舗装に対する载荷試験結果を解析することにより求めた。また、減衰は特別な場合を除き剛性の値の0.5%とした。

解析にあたっては三次元有限要素法を用いた離散化モデルで舗装構造を表現している。解析対象区間は長さ20m、幅20m、深さ10mである。幾何学的な対称性を考慮して、図-11のように解析領域の半分を離散化して、移動荷重を受ける滑走路の動的解析を行っている。車輪が通過する位置にある要素の長さや幅は、舗装とタイヤの接地面を長方形で近似した長さや幅に等しい。解析で考慮した車輪配置は図-12(a)に示すような単軸荷重、二軸荷重、三軸荷重である。解析には8節点ソリッド要素を用いている。解析に使用する全節点数は22540、全要素数は18720となる。すべての解析をプロセッサ800MHz、メモリー768MbのGateway GP7で行なった。時間領域160ステップの計算に要したCPU時間は24分であった。

空港舗装構造設計要領¹³⁾によると、タイヤと舗装の接地面を、図-12(d)のように1個の長方形(0.4L×0.6L)と半径

0.3Lの2個の半円で近似している。Lは接地面の全長である。実際の接地面積は0.1645m²であり、この場合L=0.56mとなる。それは長さ0.5mで幅0.336mの長方形にほぼ等しく、その長方形の面積は0.168m²となる。B-747-400の4輪からなる1脚の総荷重は910kNであり、この場合タイヤ圧は1.35MPaとなる。

アスファルト舗装を設計する時、その設計基準にアスファルトコンクリート (AC) 層下面の水平引張りひずみと路床上面の鉛直圧縮ひずみ ϵ_{zz} が用いられる。したがって、ここでは、表面たわみ、および図-12(b), (c)に記したタイヤ中心位置に沿ったACの要素E_Aにおける ϵ_{xx} と ϵ_{yy} 、脚中心位置すなわちモデルの対称軸に沿った路床要素E_Sの ϵ_{zz} を求めた。

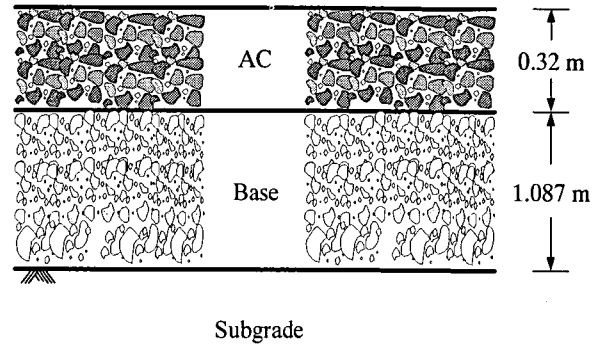


図-10 空港滑走路の断面形状

表-2 舗装構成層の材料特性

Pavement Layer	Modulus (MPa)	Density (kg/m ³)	Poisson's Ratio
AC	4645	2300	0.35
Base	166	1900	0.35
Subgrade	125	1900	0.35

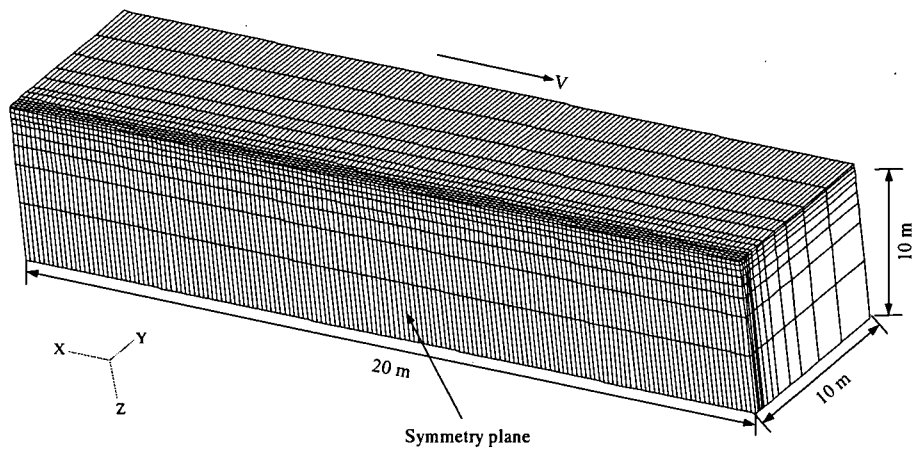


図-11 空港滑走路の三次元有限要素分割

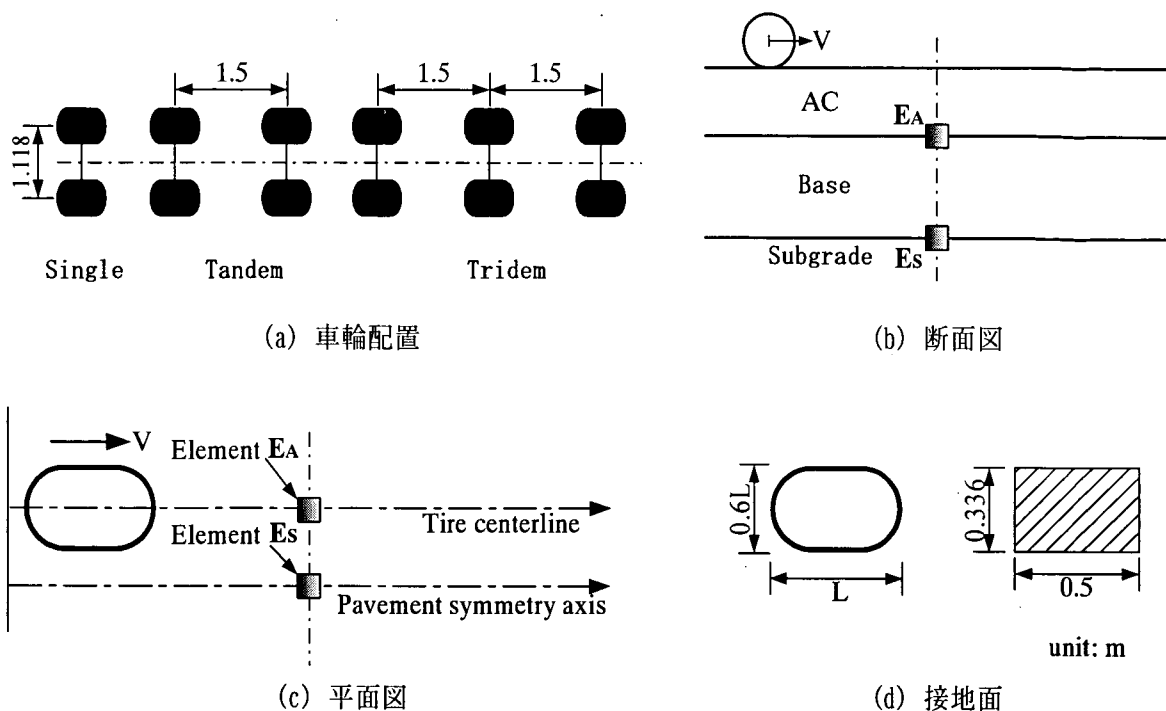


図-12 車輪配置，タイヤおよび舗装内要素位置と等価載荷面積

(2) 単軸移動荷重

等速度 $V=10\text{m/s}$ で単軸荷重が移動するとき，解析領域中央の荷重図心点での表面たわみ，AC層要素 E_A と路床要素 E_S のひずみ応答履歴を計算した．AC層下面の荷重走行方向のひずみ ϵ_{xx} には，荷重の走行によって引張と圧縮両方の状態が生ずる．最大引張ひずみは 248×10^{-6} であるのに対して，その前後で生ずる圧縮ひずみは最大で 43×10^{-6} である．これと直交する水平ひずみ ϵ_{yy} は，引張のみが発生し，荷重の中心点直下で最大で，その値は 170×10^{-6} となる．路床上面の鉛直方向の垂直ひずみ ϵ_{zz} は，荷重位置によらず常に圧縮であり，移動荷重の中心点が直上にあるときに圧縮ひずみは最大になり，その値は 287×10^{-6} である．AC層におけるひずみの正負の交番は，横断方向におけるひび割れ発生危険性が大きいことを示唆している．

開発したプログラムの有効性を検証するため，等速度 $V=10\text{m/s}$ で移動する単軸荷重が -5m ， 0m ， 5m に到達したときの表面たわみ，AC層下面，路床上面ひずみを図-13に記している．図から明らかなように，荷重の大きさが一定のとき，表面たわみやひずみの応答波形は形を変えずに移動荷重と同じ速さで移動する．移動荷重が影響する範囲はタイヤ中心点近傍であることがわかる．

(3) 航空機速度の影響

図-14は単軸移動荷重直下の中央点における表面たわみ，AC要素 E_A と路床要素 E_S のひずみと航空機速度の関係である．この図より，移動速度が速くなるほど表面たわみが小さくなっているが，速度が4倍になってもその減少の程度は5%と小さい．航空機の速度が 10m/s から 40m/s に増加するとアスファルト層の水平ひずみはかなり減少する．アスファルト層下面の荷重移動方向のひずみ ϵ_{xx} は15%減少し，移動方向に直交する横断方向では垂直ひずみ ϵ_{yy} は8%減少する．アスファルト層のひずみと対照的に路床上面の鉛直ひずみは僅かに増加する．また，移動速度が速くなると応答のピーク値は，接地面の図心位置よりわずかであるが進行方向へ移動する．

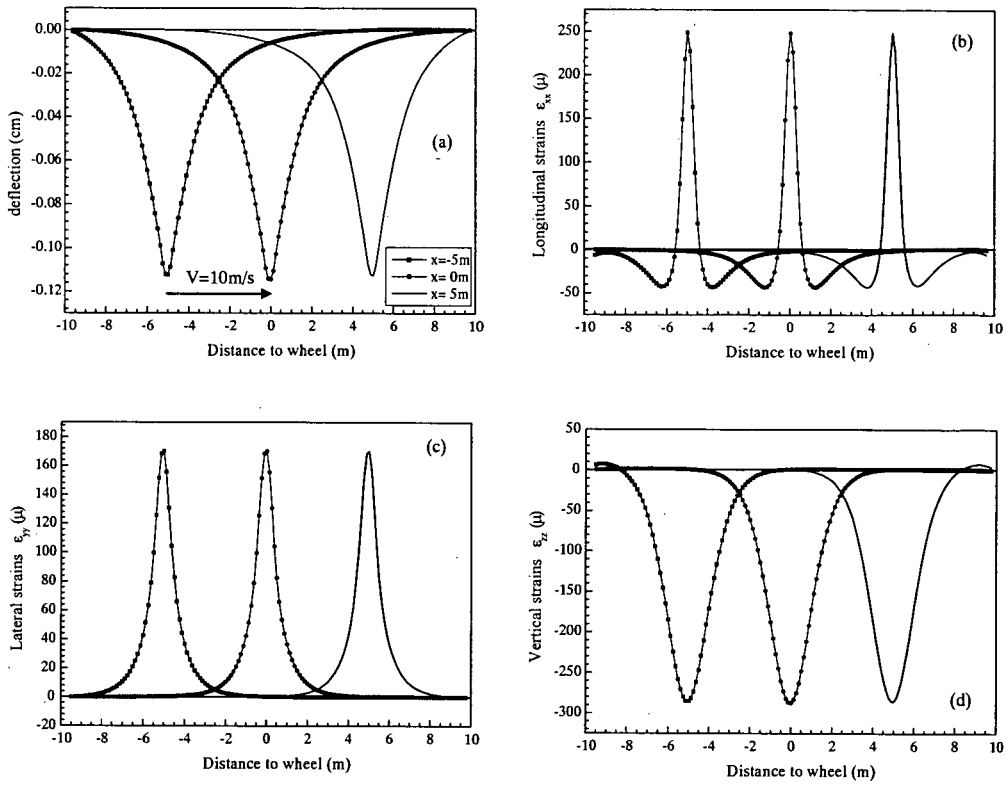


図-13 単軸荷重による表面たわみとひずみの変化と着目点の関係
 (a) たわみ; (b) AC層下面のひずみ ϵ_{xx} ; (c) AC層下面のひずみ ϵ_{yy} ; (d) 路床のひずみ ϵ_{zz}

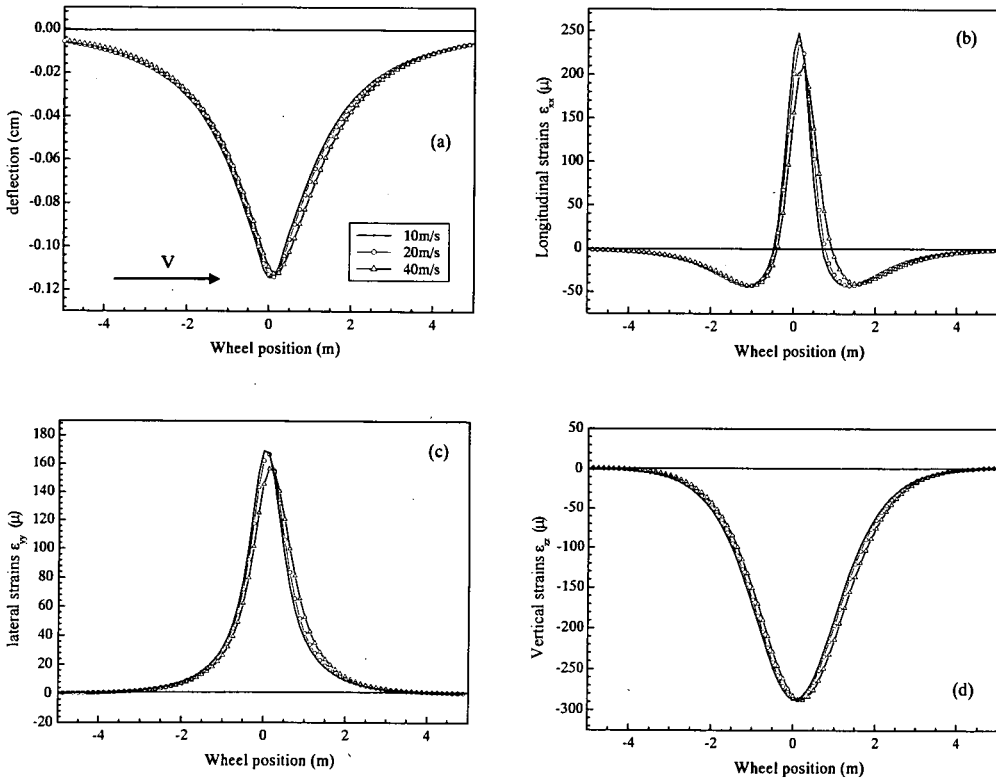


図-14 航空機速度と表面たわみ, ひずみの変化関係
 (a) たわみ; (b) AC要素 E_A のひずみ ϵ_{xx} ; (c) AC要素 E_A のひずみ ϵ_{yy} ; (d) 路床要素 E_S のひずみ ϵ_{zz}

(4) 厚さの影響

AC層の厚さと応答との関係を知るため、AC層の厚さ $h=32\text{cm}$ を基準として $\pm 25\%$ 変化させた $h=24\text{cm}$, 32cm , 40cm の3種類の厚さを用いて計算を行った。その結果、AC層が厚くなると、応答は小さくなることがわかった。具体的には、AC層の厚さが25%増加すると、たわみは13%、AC層下面のひずみ ϵ_{xx} と ϵ_{yy} がそれぞれ22%と24%、路床のひずみ ϵ_{zz} は16%減少する。逆に、AC層の厚さが25%減少すると、最大たわみは18%、AC層下面のひずみ ϵ_{xx} と ϵ_{yy} はそれぞれ33%と41%、路床のひずみ ϵ_{zz} は19%増加する。このように、AC層が薄いほど圧縮、引張の両ひずみも大きくなることは、AC層の減厚によりひび割れ発生の危険性が増大することを意味している。

(5) 車軸配置の影響

図-15は複輪、複々輪および6輪からなる主脚（以下では単軸、二軸、三軸と称す）荷重が移動するときの応答

を示している。三軸は広い範囲に分散して荷重が作用するため、応答も広い範囲に及んでいる。この場合、個々のタイヤの接地圧を 1.35MPa としているので、三軸は単軸の3倍の荷重が作用していることになる。応答の最大値も ϵ_{xx} を除き三軸の場合が最も大きくなっている。 ϵ_{xx} についてみると、荷重重心の直下の引張ひずみは単軸が最も大きく、次に、二軸、三軸の順であり、その前後に現れる圧縮ひずみの最大値は三軸で最大となり、二軸、単軸の順となっている。二軸の場合、縦断方向最大引張ひずみ ϵ_{xx} は 208×10^{-6} 、最大圧縮ひずみは 68×10^{-6} となり、横断方向最大引張ひずみ ϵ_{yy} は 207×10^{-6} となっている。三軸の場合、縦断方向最大引張ひずみ ϵ_{xx} は 180×10^{-6} 、最大圧縮ひずみは 78×10^{-6} となり、横断方向最大引張ひずみ ϵ_{yy} は 238×10^{-6} となっている。路床上面のピーク圧縮ひずみ ϵ_{zz} は、それぞれ 508×10^{-6} と 647×10^{-6} となり、引張ひずみは発生しない。

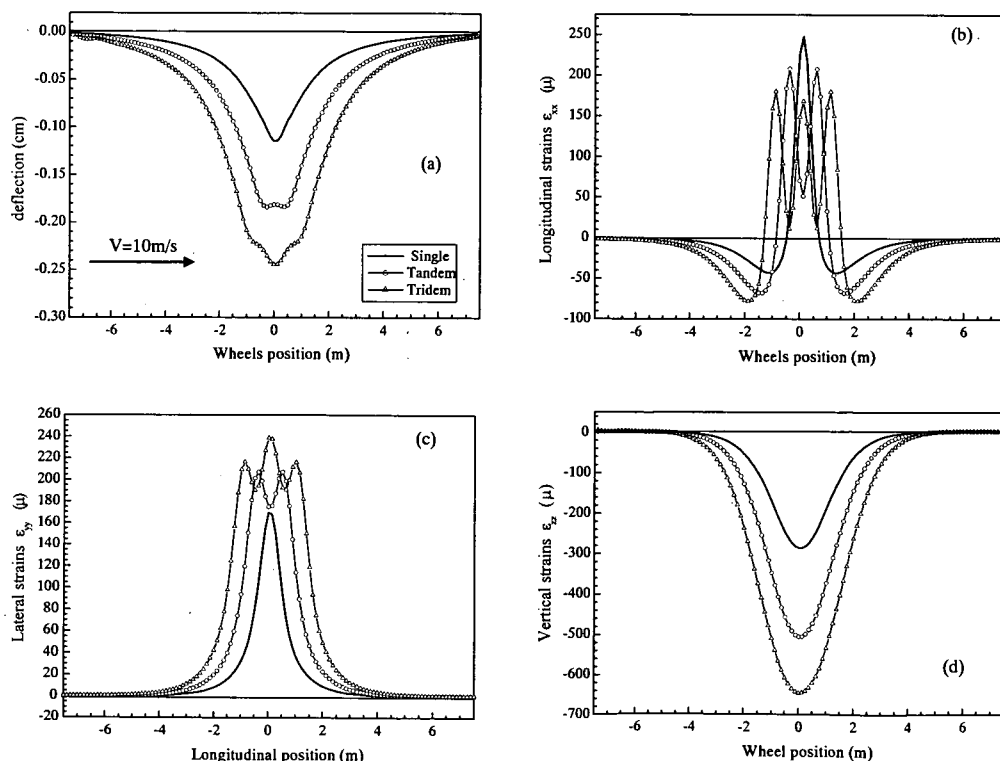


図-15 主脚形式と表面たわみ、ひずみの応答

(a)たわみ; (b) AC要素 E_A のひずみ ϵ_{xx} ; (c) AC要素 E_A のひずみ ϵ_{yy} ; (d) 路床要素 E_S のひずみ ϵ_{zz}

(6) 静的荷重、衝撃荷重と移動荷重の応答の比較

単軸荷重が等速走行するとき(V=10m/s)の応答形状と、静的荷重や衝撃荷重が作用した時の応答を比較している。衝撃荷重の応答はピーク値に達したときの走行方向の応答形状を示している。解析では静的荷重の大きさ、衝撃荷重のピーク値と移動荷重の大きさを等しいとしている。衝撃荷重を調和関数 $f(t)=227.5\sin^2(20\pi t)$ kNで表し、荷重作用時間は $t=0.0\sim 0.05$ 秒として動的解析を行った。ピーク値227.5kNは航空機の車輪に作用する荷重を想定している。動的解析の時間ステップ幅は0.002秒、解析対象時間範囲は0.06秒としている。静的荷重、衝撃荷重と移動荷重作用時の荷重作用点直下の表面たわみ、AC層下面と対称軸下の路床上面のひずみを算出した。

衝撃荷重による応答はAC表面の着目点において表面たわみが最大になったときのたわみとひずみに着目した。計算結果をみると、静的と移動荷重で計算したたわみ形状はほぼ同じであるが、衝撃荷重の場合のピーク値は10%ほど小さくなっている。また、アスファルト下面の応答ひずみ ϵ_{xx} と ϵ_{yy} では、移動荷重と静的荷重のひずみ応答はほぼ等しいのに対し、衝撃荷重の場合は似ているものの、その大きさは両者に比べピーク値で12%程度小さくなっている。路床上面の鉛直ひずみにが移動荷重、静的荷重、衝撃荷重の場合で異なる状況は、AC層と同様の傾向である。

4.4 線形粘弾性の有限要素方程式

(1) 粘弾性体の構成方程式¹⁴⁾

アスファルト舗装の粘弾性モデルは4要素のBurgerモデルとしての表現を考えた。図-16に示すBurgerモデルは1個のMaxwell要素と1個のVoigt要素の直列結合である。ここで C_{G1} と C_{K1} はそれぞれ弾性変形の偏差成分および体積成分のコンプライアンスを意味する。

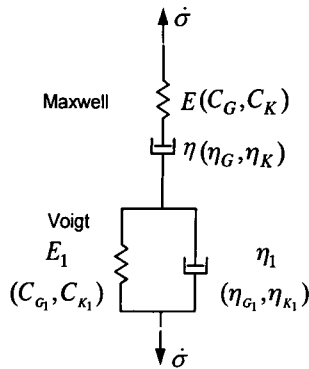


図-16 Burger モデル

Maxwell要素に対しては、そのひずみ速度 $\{\dot{\epsilon}_s\}$ を偏差成分 $\{\dot{\epsilon}'_s\}$ と体積成分 $\{\dot{\epsilon}_{sm}\}$ に分解して、次の形に書くことができる。

$$\begin{aligned} \{\dot{\epsilon}_s\} &= \{\dot{\epsilon}'_s\} + \{\dot{\epsilon}_{sm}\} \\ &= \{\dot{\epsilon}'_s\}' + \frac{1}{2\eta_G}\{\dot{\sigma}\} + \{\dot{\epsilon}_{sm}\}' + \frac{1}{3\eta_K}\{\dot{\sigma}_m\} \\ &= \frac{1}{2G}\{\dot{\sigma}\} + \frac{1}{2\eta_G}\{\dot{\sigma}\} + \frac{1}{3K}\{\dot{\sigma}_m\} + \frac{1}{3\eta_K}\{\dot{\sigma}_m\} \end{aligned} \quad (4-9)$$

ここで G と K はせん断および体積弾性係数、添字 G と K はそれぞれMaxwell要素のせん断および体積係数である。

Voigt要素に関する式は次の形に書くことができる。

$$\begin{aligned} \{\dot{\epsilon}_i\} &= \{\dot{\epsilon}'_i\} + \{\dot{\epsilon}_{im}\} = \frac{1}{2\eta_{G1}}\{\dot{\sigma}\} - \frac{1}{T_{G1}}\{\epsilon'_i\} + \frac{1}{3\eta_{K1}}\{\dot{\sigma}_m\} - \frac{1}{T_{K1}}\{\epsilon_{im}\} \\ \{T_{G1}\} &= \eta_{G1}C_{G1} \quad \{T_{K1}\} = \eta_{K1}C_{K1} \end{aligned} \quad (4-10)$$

ここに、 T_{G1} と T_{K1} はせん断変形と体積変形の遅延時間、添字 $G1$ と $K1$ はそれぞれVoigt要素のせん断および体積係数である。

Burgerモデルのひずみ速度は次の2つ部分に分けられる。

i) 偏差成分

$$\{\dot{\epsilon}'_i\} = \frac{C_G}{2}\{\dot{\sigma}\} + \left(\frac{1}{2\eta_G} + \frac{1}{2\eta_{G1}}\right)\{\dot{\sigma}\} - \frac{1}{T_{G1}}\{\epsilon'_i\} \quad (4-11)$$

ii) 体積成分

$$\{\dot{\epsilon}_{im}\} = \frac{C_K}{3}\{\dot{\sigma}_m\} + \left(\frac{1}{3\eta_K} + \frac{1}{3\eta_{K1}}\right)\{\dot{\sigma}_m\} - \frac{1}{T_{K1}}\{\epsilon_{im}\} \quad (4-12)$$

応力変化率については、ひずみ速度と同様に、2つの部分に分けられる。

i) 偏差成分

$$\{\dot{\sigma}\} = \frac{2}{C_G}\{\dot{\epsilon}'_i\} - \frac{1}{C_G}\left(\frac{1}{\eta_G} + \frac{1}{\eta_{G1}}\right)\{\dot{\sigma}\} + \frac{2}{C_G}\frac{1}{T_{G1}}\{\epsilon'_i\} \quad (4-13)$$

ii) 体積成分

$$\{\dot{\sigma}_m\} = \frac{3}{C_K}\{\dot{\epsilon}_{im}\} - \frac{1}{C_K}\left(\frac{1}{\eta_K} + \frac{1}{\eta_{K1}}\right)\{\dot{\sigma}_m\} + \frac{3}{C_K}\frac{1}{T_{K1}}\{\epsilon_{im}\} \quad (4-14)$$

最終の応力増分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \{\Delta\sigma\} &= \{\dot{\sigma}\}dt \\ &= \{\dot{\sigma}'\}dt + \{\dot{\sigma}_m\}dt \\ &= [D']\{\Delta\epsilon\} + [D'']\{\epsilon\}dt - [P]\{\sigma\}dt \end{aligned} \quad (4-15)$$

ここに、 $[D']$:弾性マトリックス; $[D'']$, $[P]$:粘性マトリックス; $\{\sigma\}$:応力ベクトル; $\{\varepsilon\}$:ひずみベクトルである。

(2) 有限要素方程式

仮想仕事の原理を用いて以下の方程式を導くことができる。

$$\int_V \{\delta \varepsilon_{n+1}\}^T \sigma_{n+1} dV + \int_V \{\delta u_{n+1}\}^T \rho \ddot{u}_{n+1} dV - \int_{S_f} \{\delta u_{n+1}\}^T t_{n+1} dS = 0 \quad (4-16)$$

変位、速度と加速度に関して中心差分法を用いることにより、以下のような形で有限要素方程式を書くことができる。

$$\left([K_e] + \frac{1}{\Delta t^2} [M] \right) \{\Delta d\}_{n+1} = \{f\}_{n+1} - \{f_o\}_{n+1} - [K_v] \{d\}_{n+1} \Delta t + \{f_r\}_{n+1} \Delta t + \frac{1}{\Delta t^2} [M] \{d\}_n \quad (4-17)$$

$$\begin{aligned} \{d\}_{n+1} &= \{d\}_n + \{\Delta d\}_n \\ \{\sigma\}_{n+1} &= \{\sigma\}_n + \{\Delta \sigma\}_n \end{aligned} \quad (4-18)$$

ここに

$[K_e] = \int_V [B]^T [D'] [B] dv$, 弾性剛性マトリックス

$[K_v] = \int_V [B]^T [D''] [B] dv$, 粘性項マトリックス

$[M] = \int_V \rho [N]^T [N] dv$, 質量マトリックス

$\{d\}$: 変位ベクトル

$\{f\} = \int_S [N]^T \{t\} dS$, 外力ベクトル (移動荷重)

$\{f_o\} = \int_V [B]^T \{\sigma\} dv$, 節点力ベクトル (応力)

$\{f_r\} = \int_V [B]^T [P] \{\sigma\} dv$, 粘性項ベクトル

$\{\Delta d\}$: 変位増分

$\{\Delta t\}$: 時間増分

(3) 数値計算結果

空港舗装構造の要素分割は線形弾性モデルと同じものとした。舗装構造層の材料特性は表-2に示す。路盤と路床は線形弾性とし、AC層については表-3に示した特性値を用いた。これらの値は表-2等も参考にしたが、実験のデータがほとんど得られていないことから、広い範囲の値を適宜設定した。

二軸荷重が等速度 $V=10\text{m/s}$ で移動するときの車輪直下における表面たわみの応答履歴は図-17のようになる。この図から、粘性係数が大きくなると表面たわみは小さくなり、粘性係数が無限大になると表面たわみは弾性モデルの場合と一致することがわかる。図-18は二軸移動荷重直下における表面たわみと航空機速度の関係である。移動速度が大きくなるほど表面たわみが小さくなっている

が、速度が4倍になってもその減少の程度は6.7%と小さい。

表-3 アスファルトコンクリート層の粘性係数

case	E_1	η_G	η_K	η_{G1}	η_{K1}	V(m/s)
1	600	700	10^6	60	10^6	10
2	600	106	10^6	10^6	10^6	10
3	4645	700	700	700	700	10
4	4645	1960	1960	700	700	10
5	4645	700	700	700	700	20
6	4645	700	700	700	700	40

E:MPa; η :MPa·s

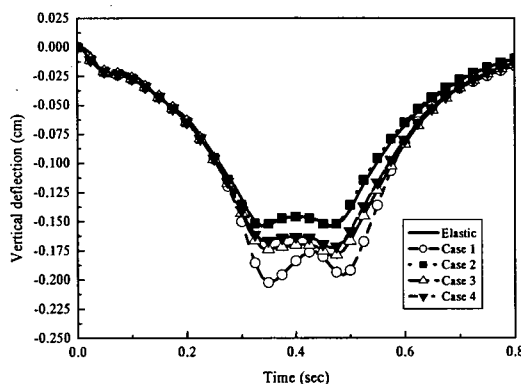


図-17 二軸荷重による着目点の表面たわみの変化

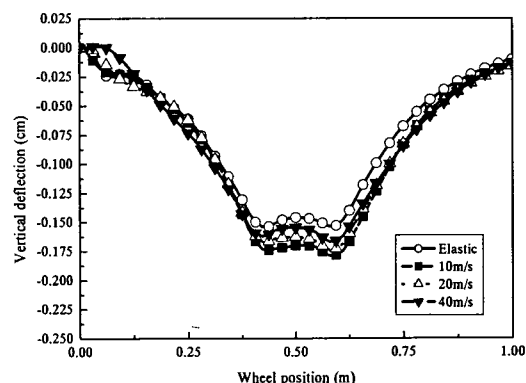


図-18 速度による表面たわみの変化の違い (Case5)

5. 結論

本研究では、空港舗装構造の非破壊評価を精度良く、効率的に行うことができるアルゴリズムを開発した。具体的には、舗装を多層弾性構造と考え、FEMでモデル化し、その表面にFWDを模擬した動的荷重を作用させたときの応答解析、各層の弾性係数や減衰係数に対する応答の感度解析を実施した。これにより以下のような知見が

得られた。

- (1) Ritz ベクトルを用いて効率的に計算できることを示した。例題では、自由度 25000 以上の運動方程式を、マトリックスサイズ 10×10 となる運動方程式に縮小しても精度が変わらないことが明らかになった。
- (2) 感度解析に関して、それぞれの感度方程式に対応する Ritz ベクトルを求めることはせず、運動方程式から求めた Ritz ベクトルの数を、25 個用いて感度解析を行うことにより、十分な計算精度が得られることが明らかになった。
- (3) 逆解析の観点から、Ritz ベクトルの数は 30 個程度用いると真値に収束することが明らかになった。

また、航空機が走行する場合の舗装応答については、移動する車輪の作用位置と接地領域を決定する効率的な方法を開発し、動的解析を行った。主な知見を整理すると以下のようなになる。

- (1) アスファルト層下面の水平方向ひずみ ϵ_{xx} は、すべての車輪配置で引張ひずみとその前後に圧縮ひずみの状態が発生する。路床上面の鉛直ひずみ ϵ_{zz} は常に圧縮状態にある。
- (2) 移動荷重の速度は、動的たわみと路床のひずみにほとんど影響しない。しかし、移動荷重速度が 10m/s から 40m/s に増加すると、アスファルト下面の水平方向ひずみ ϵ_{xx} と ϵ_{yy} は 15% ほど減少する。
- (3) AC 層の厚さは動的応答に大きく影響する。層厚が薄くなると引張ひずみも圧縮ひずみも大きくなり、引張ひずみによる破壊や正負のひずみによる疲労破壊が起りやすくなることを暗示している。
- (4) 軸数は動的応答に顕著に影響する。二軸から三軸に軸配置が変わると、たわみは 25% も増加し、路床上面の鉛直ひずみは 21% 増加する。アスファルト層下面のひずみは多重輪配置において隣り合う車輪の影響を受け、複雑に変化する。しかし、単軸の場合、アスファルト層下面の水平方向ひずみ ϵ_{xx} は二軸や三軸より大きくなっている。
- (5) 滑走路の応答は静的と移動荷重でほぼ等しいが、静的ならびに移動荷重と衝撃荷重の場合で異なっており、たわみとひずみのピーク値は衝撃荷重のほうが小さい。
- (6) 粘弾性モデルを導入した場合、粘性係数が大きくなると表面たわみは小さくなること、走行速度が大きくなると表面たわみは小さくなる傾向がある。

(平成 15 年 2 月 14 日受付)

謝辞

本研究は運輸施設整備事業団「運輸分野における基礎的研究推進制度」の支援を受けて行った研究であることを記し、関係各位に謝意を表します。なお、現時点までに対外発表を行った研究論文の一覧表を末尾に付けています。

最後に、本研究の遂行にあたり、国土交通省国土技術政策総合研究所ならびに関係各位に謝意を表します。

参考文献

- 1) Å. Björck, Numerics of Gram-Schmidt orthogonalization, *Linear Algebra and its Applications*, 197,198, 279-316, 1994.
- 2) R.L. Cooley, A method of estimating parameters and assessing reliability for models of steady groundwater flow 1- theory and numerical properties, *Water Resour. Res.*, 13, 318-324, 1977.
- 3) E.L. Wilson, M.W. Yuan and J.M. Dicken, *Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors*, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 10, 813-821, 1982.
- 4) K.J. Bathe and E.L. Wilson, *Numerical methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- 5) 柴田明徳：最新耐震構造解析，最新建築学シリーズ 9，森北出版，1986。
- 6) W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery, *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, 2nd edn., Cambridge University Press, London, 1992.
- 7) アスファルト舗装要綱，日本道路協会，1986。
- 8) 舗装工学，土木学会，1995。
- 9) Hveem, F.N., Sherman, G.B.: California method for the structural design of flexible pavements, *Proc. Int. Conf. Structural Design of Asphalt Pavement*, Ann Arbor, Michigan, pp.851-866, 1962.
- 10) Klomp, A.J.G., Niesman, T.W.: Observed and calculated strains at various depths in asphalt pavements, *Proc. 2nd Int. Conf. Structural Design of Asphalt Pavement*, Ann Arbor, Michigan, pp.671-688, 1967.
- 11) Brown, S.F., Brunton, J.M., Stock, A.F.: The analytical design of bituminous pavements, *Proc. Instn Civ. Engrs.*, 79(2), pp.1-31, 1985.
- 12) <http://www.plan.civil.tohoku.ac.jp/pave/hoso-ml/download/html>.
- 13) 国土交通省航空局（監）：空港舗装構造設計要領，港湾空港建設技術サービスセンター，147p, 2001。
- 14) 山田 嘉昭：塑性・粘弾性，培風館，1980。

対外発表論文

- [1] 坪川将丈，八谷好高，董 勤喜 (2001)：動的解析を用いた空港アスファルト舗装健全度評価に関する検討，土木学会第 56 回年次学術講演会，CD ROM, V-050。
- [2] 松井邦人，マイナ・ジェイムス，董 勤喜，小澤良明 (2001)：垂直および水平方向に円形等分布の荷重作用を受ける舗装構造の弾性解析，土木学会舗装工学論文集，6, pp.100-109。
- [3] 董 勤喜，坪川将丈，八谷好高，松井邦人 (2001)：速度と加速度データを用いた舗装構造の逆解析，土木学会舗装工学論文集，6, pp.110-116。
- [4] 松井邦人，董 勤喜，小澤良明，飯塚浩二 (2002)：表面に

- 複数のせん断力が作用する線形多層弾性構造の解析, 土木学会論文集, No.697/V-54, pp.109-116
- [5] Dong, Q., Hachiya, Y., Takahashi, Q., Tsubokawa, Y. and Matsui, K. (2002): An efficient backcalculation algorithm of time domain for large-scale pavement structures using Ritz vectors. *The International Journal of Applied Finite Elements and Computer Aided Engineering*, 38, pp.1131-1150.
- [6] 坪川将丈, 八谷好高, 董 勤喜 (2002): 航空機走行速度を考慮した空港アスファルト舗装の疲労寿命, CD ROM, V-439.
- [7] 八谷好高, 坪川将丈, 董 勤喜 (2002): 半たわみ性材料による空港アスファルト舗装の補修設計, 土木学会舗装工学論文集, 7, pp.21-1-10.
- [8] 董 勤喜, 松井邦人, 八谷好高 (2002): 移動輪荷重が作用する空港舗装の3次元有限要素解析, 土木学会舗装工学論文集, 7, pp.25-1-10.
- [9] Dong, Q., Guo, J. and Huang, X. (2002): On the forced vibration of Popp equations under the periodic external force, *International Journal of Computational and Applied Mathematics* (in print).
- [10] Dong, Q., Hachiya, Y. and Matsui, K. (2002): Determination of layer moduli for large-scale pavement structures using various sensitivity algorithms. Proceedings of the 3rd International Symposium on 3D Finite Element Modeling for Pavement Analysis, Design & Research at Amsterdam, the Netherlands, April 2002, 75-90.
- [11] Dong, Q., Hachiya, Y. and Matsui, K. (2002): 3D finite element analysis of airfield pavement due to moving wheel loads. Proceedings of the 3rd International Symposium on 3D Finite Element Modeling for Pavement Analysis, Design & Research at Amsterdam, the Netherlands, April 2002, 443-457.
- [12] Matsui, K., Dong, Q., Hachiya, Y. and Takahashi, O. (2002): Difference in estimated layer moduli from static and dynamic backcalculations. Federal Aviation Administration Technology Transfer Conference at Atlanta, USA, May 2002, CD ROM, 17 pages.
- [13] Matsui, K., Maina, J., Dong, Q. and Inoue, T. (2002): Development of pavement structural analysis due to horizontal surface force based on elastic theory. Federal Aviation Administration Technology Transfer Conference at Atlanta, USA, May 2002, CD ROM, 14 pages.
- [14] Dong, Q., Hachiya, Y., Takahashi, Q., Tsubokawa, Y. and Matsui, K. (2002): Efficient backcalculation algorithm of time domain for large-scale pavement systems using Ritz vectors. Proceedings of the 6th International Conference on the Bearing Capacity of Roads, Railways and Airfields at Lisbon, Portugal, June 2002, 597-605.
- [15] 董 勤喜, 松井邦人, 八谷好高, 坪川将丈 (2003): 動的荷重を受ける多層弾性構造の効率的有限要素解析と感度解析, 土木学会論文集 (印刷中).