

# 国土技術政策総合研究所資料

TECHNICAL NOTE of  
National Institute for Land and Infrastructure Management

No.129

December 2003

## 季節変動を考慮した時系列分析プログラムの作成と 航空関連需要分析への適用性について

杉村佳寿・石倉智樹・広瀬宗一・山口高男

A Preparation of Time Series Analysis Program Considering the Seasonal Pattern  
and An Application to the Aviation Demand Analysis

Yoshihisa SUGIMURA, Tomoki ISHIKURA, Munekazu HIROSE and Takao YAMAGUCHI

国土交通省 国土技術政策総合研究所

National Institute for Land and Infrastructure Management  
Ministry of Land, Infrastructure and Transport, Japan

## 季節変動を考慮した時系列分析プログラムの作成と 航空関連需要分析への適用性について

杉村佳寿\*・石倉智樹\*・広瀬宗一\*\*・山口高男\*\*\*

### 要 旨

行政や研究における航空データについては、これまで年間ベースで扱われることがほとんどであり、季節変動に対してはあまり注意が払われていなかった。それは需要予測や施設計画が年ベースの数字を基に議論されてきたことから明らかであろう。しかし、空港の容量限界の実態把握や関西国際空港をはじめとする空港の経営分析、さらには航空需要の特徴と機材配分の関係の分析などには、年ベースよりもむしろ月ベースでデータ分析を実施することが望ましいと考えられる事項も少なくはない。

また、最近特に航空需要予測に対する世間の目は厳しく、総務省行政評価局や会計検査院による指摘は記憶に新しい。しかし将来の経済指標等の前提条件の変化等により、長期的な需要予測が実績と乖離することについてはある程度は不可避であり、さらに、現在の航空関係の全国需要予測モデルは世界最先端の研究成果を踏まえた学術的にもこれ以上のものはないと言われる手法を用いており、そういった点を鑑みれば航空行政を担う国としても十分に責務を果たしているといっても過言ではない。しかし、短期予測の確実性の向上という視点では、別の手法が存在する。

上述した2つの問題意識、すなわち季節変動特性の考慮と短期予測の確実性の向上を検討可能にする手法が、本稿でのテーマである時系列分析である。もともと経済分野では時系列データを用いた将来予測手法は古くから多く研究されており、完成度の高い手法が体系的にまとめられている。実際、時系列分析モデルについてはパッケージソフトでも販売されているが、ここでは今後の発展性を考慮して、とりあげたいいくつかの時系列解析手法について、理論的背景を把握した上で、Box-Jenkins法を中心に、汎用性のある時系列分析プログラムの作成を行った。また作成したプログラムの概要を理論的背景や解法のアルゴリズムと共に紹介し、さらに航空関連需要データを用いて試行的に分析を行ったものである。

キーワード：季節変動，時系列分析，Box-Jenkins法，航空需要

---

\* 空港計画研究室研究官

\*\* 空港研究部長

\*\*\* 株式会社パシフィックコンサルタンツインターナショナル，プロジェクトマネジメント事業部

〒239-0826 横須賀市長瀬3-1-1 国土技術政策総合研究所

電話：046-844-5032 Fax：046-844-5080 E-mail：sugimura-y2dg@ysk.nilim.go.jp

## **A Preparation of Time Series Analysis Program Considering the Seasonal Pattern and An Application to the Aviation Demand Analysis**

**Yoshihisa SUGIMURA \***  
**Tomoki ISHIKURA\***  
**Munekazu HIROSE\*\***  
**Takao YAMAGUCHI\*\*\***

### **Synopsis**

As for the aviation data in the administration and research, it is almost handled with an annual base, and attention wasn't paid very much against the seasonal variation. This fact comes to be previous by seeing that the demand forecasts and facility plans have been discussed with such data. Some subjects such as airport capacity restriction or airport operation should be discussed with not annual base but monthly base.

On the other hand, public opinion criticizes aviation demand forecasts for differing from actual demand. Long term demand forecast is very difficult and Civil Aviation Bureau adopts the forecast demand model that is best in the world on academic viewpoint, which means CAB accomplishes the accountability for forecast demand. For short term demand forecast, other method exists.

We prepare time series analysis program for two reasons; one is seasonal variation and another is short time forecast. In this paper, outline of the program is explained with theoretical background and algorithm for solution. A tentative analysis on aviation demand is also tried.

**Key Words:** Seasonal Variation, Time Series Analysis, Box-Jenkins Method, Aviation Demand

---

\* Researcher, Airport Planning Division, Airport Department

\*\* Director, Airport Department

\*\*\* Pacific Consultants International, Project Management Division

National Institute for Land and Infrastructure Management, Ministry of Land, Infrastructure and Transport  
Nagase 3-1-1, Yokosuka, 239-0826 Japan

Phone : +81-46-844-5032 Fax : +81-46-844-5080 E-mail : sugimura-y2dg@ysk.nilim.go.jp

## 目次

1. はじめに .....	1
2. 時系列分析の概要と分類 .....	1
3. 指数平滑法 .....	2
4. Multiplicative Decomposition Method .....	2
5. Winter's Method .....	3
6. Box-Jenkins 法 .....	4
6. 1 Box-Jenkins 法の概要 .....	4
6. 2 同定 (Identification) .....	5
6. 3 推定 (Estimation) .....	6
6. 4 診断 (Diagnostic checking) .....	9
6. 5 予測 .....	10
7. 作成プログラムの概要 .....	11
8. 航空関連需要分析の試行結果 .....	13
9. まとめ .....	15
参考文献 .....	15

## 1. はじめに

行政や研究における航空データについては、これまで年間ベースで扱われることがほとんどであり、季節変動に対してはあまり注意が払われていなかった。それは需要予測や施設計画が年ベースの数字を基に議論されてきたことから明らかであろう。しかし、空港の容量限界の実態把握や関西国際空港をはじめとする空港の経営問題など、年ベースよりもむしろ月ベースでデータ分析を実施することが望ましいと考えられる事項も少なくはない。

また、最近特に航空需要予測に対する世間の目は厳しく、総務省行政評価局や会計検査院による指摘は記憶に新しい。しかし将来の経済指標等の前提条件の変化等により、長期的な需要予測が実績と乖離することについてはある程度は不可避であり、さらに、現在の全国モデルは世界最先端の研究成果を踏まえた学術的にもこれ以上のものはないと言われる手法を用いており、そういった点を鑑みれば航空行政を担う国としても十分に責務を果たしているといっても過言ではない。しかし、短期予測の確実性の向上という視点では、別の手法が存在する。

上述した2つの問題意識、すなわち季節変動特性の考慮と短期予測の確実性の向上を検討可能にする手法が、本稿でのテーマである時系列分析である。もともと経済分野では時系列データを用いた将来予測手法は古くから多く研究されており、完成度の高い手法が体系的にまとめられている。実際時系列分析モデルについてはパッケージソフトでも販売されており、理論面を把握し、かつ英文の難解なマニュアルを読みさえすれば分析モデルの適用は可能である。もちろんそういった面倒さから、経済分野以外での実務での使用はなされていないと考えられる。

我々は理論的背景を把握した上で、Box-Jenkins法を中心に、汎用性のある時系列分析プログラムの作成を行った。本稿ではその成果であるプログラムの概要を理論的背景や解法のアルゴリズムと共に紹介し、さらに航空需要データを用いた試行的分析を行う。

本稿の構成は次の通りである。2章で時系列分析の概要と分類について説明し、3、4、5、6章でそれぞれ指数平滑化法、Multiplicative Decomposition Method、Winter's Method、Box-Jenkins Methodの理論面（モデル式と解法）について述べる。ただし、本稿では最も複雑かつ精緻な方法であるBox-Jenkins法についてのみ詳細に説明し、全体を通して必要な統計学等に関連する説明も6章において行うものとする。7章では今回作成したプログラムの概要を述べ、8章で航空需要データを用いた試行的分析を行う。9章がまとめであり、今回作成したプログラムを用いた時

系列分析の航空・空港政策への適用性について考察する。

## 2. 時系列分析の概要と分類

時系列分析としては以下の手法が用いられることが一般的である。

### ①重回帰分析

これは Causal model（因果関係モデル；関心の有る時系列を予測するために、いろんな時系列の間の関係を利用するモデル）である。

予測は通常決められたパラメータをもとに最小二乗法で行う。

$$y_t = f(\beta_0, \beta_1, \beta_2 \dots \beta_p; t) + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\sum_t =_1 (y_t - y_t)^2 \rightarrow \min. \quad (2)$$

最小二乗推定値は、時系列  $y_1, y_2, \dots, y_n$  の過去の観測値のそれぞれのウェイトが同じである。この方法では、多くのデータを用いるので、データの収集が大変な上、計算時間がかかる。

### ②Exponential Smoothing

この方法は、時系列の観測値のウェイトが個々に異なるもので、新しいデータのウェイトが大きくなる。この方法では、上式中の  $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \dots \beta_p$  の値の変化が探索でき、予測システムに組み込まれるようにこれらのパラメータの推定値をアップデートしてゆく。また、時系列の過去の観測値のウェイト付けは、一つあるいはそれ以上の定数を使って達成される。そしてこの定数は、個々の観測値にどのようなウェイトをつければいいかを決める。

### ③Box-Jenkins モデル

重回帰分析及び Exponential Smoothing とも、error terms  $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}$  が互いに関連し合わないとの仮定を置いている。この関連性が弱ければ、まだこれらの手法は、正確な予測値を与えるだろうが、もし強ければ、正確な予測値を与える方法として、 $y_t$  をその前の不規則誤差成分、 $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots$  の関数として表すモデルがベストである。

$$y_t = \mu + \psi_0 \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots \quad (3)$$

$\mu, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$  : モデルのパラメータ

Box-Jenkins モデルの欠点は、正確な予測モデルを構築するのに、多くのデータと時間を必要とすることである。このことは、時系列が季節変動を持った時系列を予測するモデルが必要な場合に特に顕著である。

さて、時系列分析は時系列データの分析と時系列モデ

ルの分析に分類される。時系列データとは、時間の経過に伴って変動する現象を記録したものである。本稿は前者の時系列データの分析を目的としており、系列の特徴を特徴付けた(過去の動向を再現した)モデルを構築し、それにより将来予測が可能となる。すなわち時系列データを解析する目的は、過去の情報を利用して将来の予測を行い、意志決定に役立てることである。これまで多くの研究により時系列分析のモデルが体系的に整理されてきた。本稿では季節変動の考慮を大きなテーマとしており、時系列分析モデルを季節変動を考慮できるモデルと考慮できないモデルに分類すると、表-1 のようになる。

表-1 モデルの分類

季節変動を考慮	季節変動の考慮なし
<ul style="list-style-type: none"> <li>・ Multiplicative Decomposition Method</li> <li>・ Winters' Method</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 指数平滑法</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>・ Box Jenkins 法</li> </ul>	

Box=Jenkins 法に関しては、季節変動を考慮したモデルと考慮しないモデルの両方の構築が可能となる。またこの方法は、データ同士の相関を認め、その特徴を利用する点で他の方法と大きく異なる。

本研究で作成するプログラムでは表-1 の全てのモデルを用いた時系列データの解析が可能となっているが、実際の分析に際しては、目的に応じたモデルを選択することになる。次章以降で各モデルについて概説する。

### 3. 指数平滑法

指数平滑法とは、時系列データに直線や曲線をあてはめてデータを平均化し、あてはめられた直線や曲線を用いて将来の数値を予測する手法である。

指数平滑法の代表的なものには、単純平滑法 (simple exponential smoothing)、二次平滑法 (Double exponential smoothing) および三次平滑法 (Triple Exponential smoothing) の3種類がある。単純平滑法は、直線をデータの平均化に用い、二次平滑法および三次平滑法は二次曲線と三次曲線をそれぞれに用いる。

各モデルはそれぞれ下記の近似式で表される。

単純平滑法： $y_t = \beta_0 + \varepsilon_t$

二次平滑法： $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$

三次平滑法： $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + 1/2 \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$

$y_t$  :  $t$  時点での観測値

$\beta_0$  : 初期値

$\varepsilon_t$  : 時点での誤差

単純平滑法の手順は以下の通りである。

初期値  $\beta_0$  を最初のいくつか (通常は 6) のデータの平均値から求め、この初期値を  $S_0$  とする。この初期値と下記の指数平滑化式および適当な  $\alpha$  を用いて観測期間の予測値を求める。プログラムでは  $\alpha$  を 0.01 から 0.3 まで 0.01 刻みで変化させている。

$$S_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) S_{t-1} \quad (4)$$

ここで、 $\alpha$  : 平滑化定数、 $S_t$  : 予測値

この数式により計算された予測値  $S_t$  と観測値との誤差を算出し、その二乗の合計を求め、二乗誤差が最小となる  $\alpha$  を求める。最適な  $\alpha$  が決定されたところで計算された  $\alpha$  と全てのデータの平均値を用いて初期値を計算し直し、上式より予測値を計算する。

二次平滑法および三次平滑法も同様な方法で計算を行うので詳細な計算手順はここでは省略するが、予測値の計算に用いる数式は以下のとおりである。

二次平滑法

$$\hat{y}_{T+\tau}(T) = \left( 2 + \frac{\alpha\tau}{(1-\alpha)} \right) S_T - \left( 1 + \frac{\alpha\tau}{(1-\alpha)} \right) S_T^{[2]} \quad (5)$$

三次平滑法

$$\begin{aligned} \hat{y}_{T+\tau}(T) = & [6(1-\alpha)^2 + (6-5\alpha)\alpha\tau + \alpha^2\tau^2] \frac{S_T}{2(1-\alpha)^2} \\ & - [6(1-\alpha)^2 + 2(5-4\alpha)\alpha\tau + 2\alpha^2\tau^2] \frac{S_T^{[2]}}{2(1-\alpha)^2} \\ & + [2(1-\alpha)^2 + (4-3\alpha)\alpha\tau + \alpha^2\tau^2] \frac{S_T^{[3]}}{2(1-\alpha)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

### 4. Multiplicative Decomposition Method

Multiplicative Decomposition Method は季節変動のある時系列データの解析に用いられる手法で、次の通り観測値をトレンド、季節要素、周期要素および不規則要素の積に分解する手法である。

$$y_t = TR_t \times SN_t \times CL_t \times IR_t \quad (7)$$

ここで、 $TR_t$  : トレンド要素

$SN_t$  : 季節要素

$CL_t$  : 周期要素

$IR_t$ : 不規則要素

Multiplicative Decomposition Method では  $TR_t$ ,  $SN_t$ ,  $CL_t$ ,  $IR_t$  の推定値である  $tr_t$ ,  $sn_t$ ,  $cl_t$ ,  $ir_t$  を推定し、分解した各ファクターにより時系列データを表現し、次のモデル

$$y_t = TR_t \times SN_t + \varepsilon_t \quad (8)$$

を用いて予測を行う。すなわち、予測値は以下の式で求められる。

$$\hat{y}_t = tr_t \times sn_t \quad (9)$$

推定、予測は以下の手順で行う。

- ① 移動平均を求めることで、季節要素、不規則要素を取り除く。移動平均をとる期間は季節変動のある期間により変化させる。例えば4半期毎のデータであれば、4つの観測値を用いて移動平均を計算し、月毎の観測値であれば12の観測値で移動平均を計算する。
- ② 中央移動平均を求める。この値が  $tr_t \times cl_t$  に相当する。
- ③ 次式を求める。

$$sn_t \times ir_t = \frac{y_t}{tr_t \times cl_t} \quad (10)$$

- ④ 求めた  $sn_t \times ir_t$  を平均することにより誤差ファクターを取り除き  $sn_t$  を求める。
- ⑤ 次式により補正し、季節ファクターを求める。

$$sn_t = \frac{\overline{sn_t}}{\sum_{t=1}^L \overline{SN_t}} \quad (11)$$

- ⑥ 次式により季節変動のないデータを作成し、これを  $tr_t$  とする。

$$d_t = \frac{y_t}{sn_t} \quad (12)$$

- ⑦ 以下のように仮定し、最小二乗法によりパラメータを推計する。

$$TR_t = \beta_0 + \beta_1 t \quad (13)$$

- ⑧ 将来の  $t$  を用いて

$$tr_t \times sn_t$$

を計算する。実際の予測では、将来の周期変動要素と不規則要素を予測することは非常に困難であるため、この手法では季節要素とトレンド要素のみを用いて将来予測を行うのが一般的である。

## 5. Winter's Method

Winter's Method は直線状の傾向変動と multiplicative な季節変動を有する時系列を予測するのに優れた方法である。この方法では季節変動のあるデータの季節要素を乗法的に処理し、指数平滑法を用いて予測を行う方法である。Winter's Method のモデルは次式で表される。

$$y_t = (\beta_0 + \beta_1 t) \times SN_t + \varepsilon_t \quad (14)$$

ここで、 $y_t$ : 観測値

$\beta_0$ : 初期値

$SN_t$ : 季節要素

$\varepsilon_t$ : 誤差

トレンド近似直線の切片  $\beta_0$  (ここでは  $a_0(T)$  とする) は下式により表される。

$$a_0(T) = \alpha \frac{y_t}{sn_t(T-L)} + (1-\alpha)[a_0(T-1) + b_1(T-1)] \quad (15)$$

また、トレンド成分である  $\beta_1$  (ここでは  $b_1(T)$  とする) は下式により表される。

$$b_1(T) = \beta [a_0(T) - a_0(T-1)] + (1-\beta)b_1(T-1) \quad (16)$$

ここで  $\alpha = \beta$  の場合には、この方法は二次指数平滑化法に等しくなる。

さらに、季節要素である  $SN_t$  (ここでは  $sn_t(T)$  とする) は、

$$sn_t(T) = \gamma \frac{y_T}{a_0(T)} + (1-\gamma)sn_T(T-L) \quad (17)$$

よって、

$$y_{t+\tau}(T) = [a_0(T) + b_1(T)\tau]sn_{T+\tau}(T+\tau-L) \quad (18)$$

もし  $b_0$ ,  $b_1$  及び  $sn_t=1, 2, \dots, L$  が, multiplicative decomposition を用いて得られる推定値を表すとする、 $a_0(0)=b_0$ ,  $b_1(0)=b_1$  として  $sn_t(0)=sn_t$ ,  $t=1, 2, \dots, L$  である。

トレンド成分  $\beta_1$  の最初の推定値は次式によって与えられる。

$$b_1(0) = \frac{\overline{y_m} - \overline{y_1}}{(m-1)L} \quad (19)$$

ここに、 $\overline{y_i}$  は、最近の  $m$  年間の過去のデータの  $i$  番目の年の観測値の平均値であり、 $i=1, \dots, m$  である。

$$a_0(0) = y_1 - \frac{L}{2} b_1(0) \quad (20)$$

$$S_t = \frac{y_t}{y_t - [(L+1)/2 - j] b_1(0)} \quad (21)$$

$$sn_t = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} S_{t+kL} \quad t=1, L \quad (22)$$

$$sn_t(0) = sn_t \frac{L}{\sum_{t=1}^L sn_t} \quad t=1, L \quad (23)$$

となる。

上記の数式にある  $\alpha, \beta$  および  $\gamma$  はモデルで用いられている係数であり、適当なこれらの係数を当てはめることにより、近似式を作成し、予測値を計算することができる。プログラムでは  $\alpha, \beta$  および  $\gamma$  をそれぞれ 0.05 から 0.3 まで変化させ観測値との誤差の二乗を最小とする  $\alpha, \beta$  および  $\gamma$  を見つけ出して予測値の計算を行う。

## 6. Box-Jenkins 法

### 6.1 Box-Jenkins 法の概要

一変量時系列モデルを扱う基礎として自己回帰移動平均 (ARMA) モデルは有用であるが、ARMA 過程は一般的に定常時系列を扱うモデルとして考えられている。非定常的変動を説明するモデルへの拡張は階差を取ることによって行われ、ARMA モデルは観測値そのものではなく階差に対してフィットされる。その結果として生じるモデルのことを自己回帰和分移動平均 (ARIMA) 過程といい、ARIMA モデルを時系列データに当てはめるアプローチ全体を指して Box-Jenkins 法と呼んでいる。

ARIMA 過程は一般的に以下のモデル式で表される。

$$\phi(B)w_t = \theta(B)a_t \quad (24)$$

ただし、

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$$

$$w_t = \begin{cases} \nabla^d z_t & d > 0 \\ z_t & d = 0 \end{cases}$$

$z_t$ : 時系列データ

$a_t$ : 誤差項 (ホワイトノイズ)

$\phi_k$ : 自己回帰パラメータ

$\theta_k$ : 移動平均パラメータ

なお、 $\nabla, B$  はそれぞれ差分演算子、ラグ演算子でありそれぞれ以下のように定義される。

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1} \quad (25)$$

$$B^k w_t = w_{t-k} \quad (26)$$

また、ホワイトノイズとは期待値 0、分散  $\sigma_a^2$  を持つ互いに独立な正規確率変数である。すなわち、

$$E(a_t) = 0 \quad (27)$$

$$E(a_t a_s) = \begin{cases} \sigma_a^2 & t = s \\ 0 & t \neq s \end{cases} \quad (28)$$

となる。

式(14)の表現を要約する表現として ARIMA( $p, d, q$ ) という表現が用いられる。なお ARIMA( $p, d, q$ ) モデルを、通常の表現で表すと以下の通りとなる。

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \dots + \phi_p w_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (29)$$

また、季節変動を考慮した乗法型季節変動モデルは次のように表される。

$$\phi(B)\Phi(B^S)w_t = \theta(B)\Theta(B^S)a_t \quad (30)$$

ただし、

$$\Phi(B^S) = 1 - \Phi_1 B^S - \Phi_2 B^{2S} - \dots - \Phi_p B^{pS}$$

$$\Theta(B^S) = 1 - \Theta_1 B^S - \Theta_2 B^{2S} - \dots - \Theta_q B^{qS}$$

$$w_t = \nabla_S^D \nabla^d z_t$$

$\Phi$ : 季節変動自己回帰パラメータ

$\Theta$ : 季節変動移動平均パラメータ

このモデルは ARIMA( $p, d, q$ )  $\times$  ( $P, D, Q$ )<sub>S</sub> のように要約して表現される。

Box-Jenkins 法は、基本的には 1. 同定, 2. 推定, 3. 診断テスト, 4. 予測の 4 段階の手順からなる。図-1 には、Box-Jenkins 法の手順のフローチャートを示す。



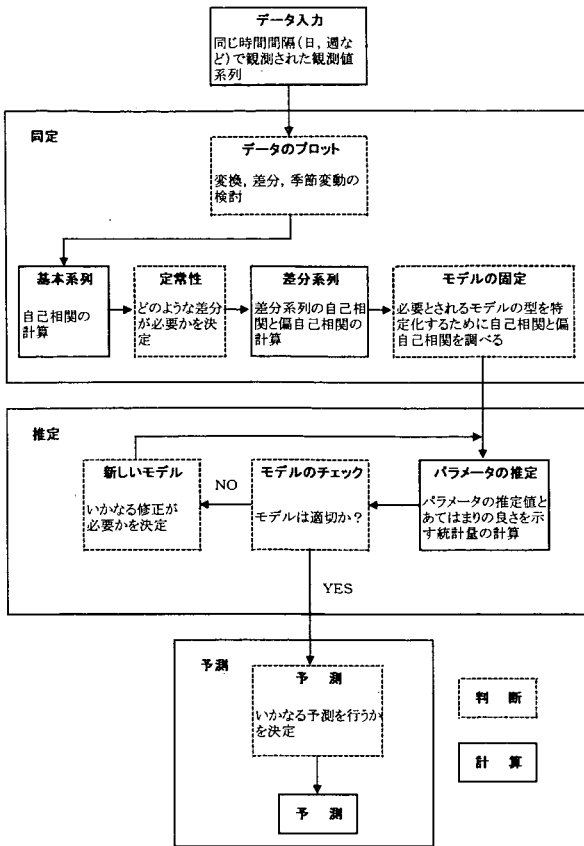


図-1 Box-Jenkins 法の手順

一番目の同定の段階とは、ARIMAモデルの一般形から、特定のひとつのモデルを選択することである。すなわち、自己回帰過程、移動平均過程の階数（規則変動、季節変動のため）、連続差分、季節差分の階数（定常化のため）を選択することである。すなわち、 $ARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$  の  $p, d, q, P, D, Q, S$  を特定することになる。ただし、この段階で特定のひとつのモデルを選択できない場合は、いくつかの候補を選択することになる。

二番目の推定の段階とは、同定の段階で選択したモデルに含まれるパラメータを推定する段階である。すなわち、自己回帰パラメータ、移動平均パラメータ、季節変動自己回帰パラメータ、季節変動移動平均パラメータの推定を行う。

三番目の診断の段階とは、選択したモデルが実際のデータに当てはまっているかの妥当性を診断する。ここで妥当性が疑われる場合は、新たなモデルを同定する必要があることになる。

四番目の予測の段階は、診断を通過したモデルによる予測を行う段階である。次節以降、各段階について述べる。

## 6.2 同定 (Identification)

先述したとおり、同定とは  $ARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$  の  $p, d, q, P, D, Q, S$  の値を決定することである。同定の段階で用いられる指標は、自己相関関数と偏自己相関関数である。時系列データの自己相関関数と偏自己相関関数の特徴を見出し、その特徴がいかなるモデルの理論的な自己相関関数と偏自己相関関数と類似しているかでモデルの同定を行うことになる。したがって、同定の段階は実施者に多くの経験を要求しており、逆に言うならば恣意性の入り込む余地があることに注意が必要である。したがってこの段階ではいくつかの候補を用意しておくほうが無難である。

さて、定常時系列  $z_t$  の期待値、分散をそれぞれ  $0, \sigma^2$  としたとき自己共分散  $\lambda$ 、自己相関  $\rho$  は次のように表される。

$$\lambda_k = Cov(z_t, z_{t-k}) = E[z_t \cdot z_{t-k}] \quad (31)$$

$$\rho_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_0}, \quad \lambda_0 = \sigma^2 \quad (32)$$

また偏自己相関は一般に次のように定義される。 $z_t$  の大きさ  $k \times k$  の自己共分散行列及び自己相関行列を

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{k-1} \\ \lambda_1 & \lambda_0 & \cdots & \lambda_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{k-1} & \lambda_{k-2} & \cdots & \lambda_0 \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \sigma^2 \mathbf{P}_k \quad (33)$$

ここで  $\mathbf{P}_k$  の  $k$  列目の各要素を  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$  で置き換えた行列を

$$\mathbf{P}_k^* = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_k \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_k \end{pmatrix} \quad (34)$$

とおくと、偏自己相関は以下のように表される。

$$\phi_{kk} = \frac{|\mathbf{P}_k^*|}{|\mathbf{P}_k|} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (35)$$

時系列過程の自己相関と偏自己相関の真の値は当然知

ることはできない。したがって、モデルの同定に当たってはデータから計算される標本自己相関及び標本偏自己相関を用いて、それらがいかなる典型的なモデルの母自己相関及び母偏自己相関に類似しているかを調べることになる。標本自己相関及び標本偏自己相関は推定値であるので標本誤差を持ち、母自己相関及び母偏自己相関に正確に一致することはない。

標本自己相関  $r_k$  は以下の通り計算される。ただし、 $n$  は適切な差分が取られた後の利用可能な観測値の数である。

$$r_k = \frac{c_k}{c_0} \quad (36)$$

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} z_i z_{i+k}, \quad k \geq 0 \quad (37)$$

また、標本偏自己相関  $\hat{\phi}_{kk}$  は直接的な公式によって推定することはできないが、以下のように逐次的に計算が可能である。

$$\hat{\phi}_{kk} = \begin{cases} r_1 & k = 1 \\ \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} r_j} & k = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (38)$$

ただし、 $\hat{\phi}_{k,j} = \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{kk} \hat{\phi}_{k-1,k-j}$

ここで、各典型モデルの自己相関関数、偏自己相関の特徴を表-2 に示す。先に述べた方法で得た標本自己相関、標本偏自己相関をプロットし、その特徴を典型モデルの特徴と比較することにより、モデルの同定が可能となる。もちろんより高次のモデルや乗法型季節変動モデルの自己相関関数、偏自己相関関数の特徴も存在するが、極めて複雑になるため視覚的な判断はかなり難しくなる。詳細については参考文献を参照されたい。

表-2 典型モデルの自己相関、偏自己相関関数の特徴

モデル	自己相関	偏自己相関
AR(1)	指数的に減衰する	$\phi_{11}$ のみがゼロではない
AR(2)	指数的変動かサインカーブで減少する	$\phi_{11}$ と $\phi_{22}$ のみがゼロではない
MA(1)	$\rho_1$ のみがゼロではない	指数的に減衰する
MA(2)	$\rho_1$ と $\rho_2$ がゼロではない	指数的変動かサインカーブで減少する
ARMA(1,1)	最初のラグから指数的に減衰する	最初のラグから指数的に減衰する

さて、モデル同定の際には実際上自己相関がどのラグ以降ゼロになるかを知る必要がある。そのためには、標本自己相関の標準誤差を用いる。Bartlett(1946,1966)によれば、理論的な自己相関関数が消えたと思われる期  $q$  より大きなラグ  $k$  において、標本自己相関の分散は近似的に次式で与えられる。

$$Var(r_k) \cong \frac{1}{n} \left[ 1 + 2(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \dots + \rho_q^2) \right] \quad k > q \quad (39)$$

上式において実際には母自己相関は標本自己相関に置き換えられ、 $r_k$  の近似的な分散の推定値は以下の通り求められる。

$$\overline{Var}(r_k) = \frac{1}{n} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^q r_i^2 \right], \quad k > q \quad (40)$$

上式の平方根は  $r_k$  の大標本標準誤差といい、 $SE(r_k)$  と表される。

また各々の自己相関を個別に見るのではなく、ひとつのグループ例えば初めの  $K$  個の自己相関が、モデルは不適切であるという証拠を与えているか否かを調べることもできる。Box and Pierce(1970)は全ての自己相関が0である純粋なランダム過程について以下の統計量が近似的に自由度  $K$  の  $\chi^2$  分布  $\chi^2(K)$  に従うことを示している。

$$Q(K) = n(n+2) \sum_{k=1}^K \frac{1}{n-k} r_k^2 \quad (41)$$

この  $Q$  統計量を用いる検定はかばん検定(Portmanteau test)と呼ばれる。 $Q$  の計算値が所与の有意水準の値に対応する自由度  $K$  の  $\chi^2$  分布の臨界値より大きければ、計算に用いた自己相関はゼロとは有意に異なっており、自己相関に特定のパターンが存在することが示唆されていることになる。なお  $Q$  統計量は自己相関の数  $K$  に敏感であり、経済時系列データについては  $K=12, K=24$  が有効であることが証明されている。

また、Quenouille(1949)は標本偏自己相関の分散が近似的に次式で与えられることを示している。ただし  $n$  は適切な差分を取った後の観測値の数を表し、 $p$  は最初の  $p$  個の偏自己相関が非ゼロと仮定されていることを表す。

$$Var(\hat{\phi}_{kk}) \cong \frac{1}{n}, \quad k \geq p+1 \quad (42)$$

### 6. 3 推定 (Estimation)

#### 6. 3. 1 緒論

ここでは ARMA( $p, q$ )モデルの推定を行うが、次数であ

る  $p, q$  の組合せについては同定の段階で候補が絞られていることになる。ここでは、自己回帰パラメータ  $\phi$  と移動平均パラメータ  $\theta$  の推定を取り扱う。なお、乗法型季節変動モデルのパラメータ推定は ARMA( $p, q$ )モデルの推定と同様の手順で行われる。

観測値は正規分布に従うと仮定されており、したがってパラメータ推計には最尤推定の原理により残差の二乗和関数を最小にする方法に基づく手続きを用いることになる。

### 6. 3. 2 AR 過程のパラメータ推定

AR 過程については、移動平均項を持たないため、線形方程式を解くことによりパラメータ推計が可能である。

AR( $p$ )過程は次式のように表される。

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \phi_2 w_{t-2} + \dots + \phi_p w_{t-p} + a_t \quad (43)$$

$w_t$  : 定常化後の時系列データ (平均値 0)

$z_{t-1}$  から  $z_{t-p}$  を乗じて期待値を取ると

$$\begin{aligned} r_1 &= \phi_1 r_0 + \phi_2 r_1 + \dots + \phi_p r_{p-1} \\ r_2 &= \phi_1 r_1 + \phi_2 r_0 + \dots + \phi_p r_{p-2} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (44)$$

$$r_p = \phi_1 r_{p-1} + \phi_2 r_{p-2} + \dots + \phi_p r_0$$

これを  $r_0$  で割ると以下の表現を得る。

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{pmatrix} \quad (45)$$

この表現は Yule-Walker (ユール・ウォーカー) 方程式として知られており、標本自己相関を用いることにより線形方程式の組が得られ、パラメータ  $\phi$  の推定値を求めることができる。

### 6. 3. 3 MA 及び混合過程のパラメータ推定

MA 過程及び混合過程は最尤推定の原理に基づき推定を行う必要がある。ここでは ARMA( $p, q$ )過程の推定方法について述べる。

ARMA( $p, q$ )過程は次のように表される。

$$\begin{aligned} w_t &= \phi_1 w_{t-1} + \dots + \phi_p w_{t-p} \\ &\quad - a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \end{aligned} \quad (46)$$

$w_t$  : 定常化後の時系列データ (平均 0)

$n$  次元列ベクトル  $\mathbf{w}' = (w_1, w_2, \dots, w_n)'$ ,  $\mathbf{a}' = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$  と  $p+q$  次元列ベクトル  $\mathbf{e}_a' = (\mathbf{w}', \mathbf{a}') = (w_1, w_2, \dots, w_p, a_1, a_2, \dots, a_q)$

$\dots, a_0)$  を用いて  $n$  個の等式を行列表示すると、混合モデルは以下ようになる。

$$\mathbf{L}_\phi \mathbf{w} = \mathbf{L}_\theta \mathbf{a} + \mathbf{F} \mathbf{e}_a \quad (47)$$

$$\mathbf{L}_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_2 & -\phi_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_3 & -\phi_2 & -\phi_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\phi_p & -\phi_{p-1} & -\phi_{p-2} & -\phi_{p-3} & \dots & -\phi_2 & -\phi_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\phi_p & -\phi_{p-1} & -\phi_{p-2} & -\phi_{p-3} & \dots & \dots & -\phi_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_p & -\phi_{p-1} & -\phi_{p-2} & -\phi_{p-3} & \dots & \dots & -\phi_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\phi_p & -\phi_{p-1} & \dots & -\phi_2 & -\phi_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\phi_p & -\phi_{p-1} & \dots & -\phi_2 & -\phi_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta_2 & -\theta_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta_3 & -\theta_2 & -\theta_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta_4 & -\theta_3 & -\theta_2 & -\theta_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\theta_q & -\theta_{q-1} & -\theta_{q-2} & -\theta_{q-3} & \dots & -\theta_2 & -\theta_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\theta_q & -\theta_{q-1} & -\theta_{q-2} & -\theta_{q-3} & \dots & \dots & -\theta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_q & -\theta_{q-1} & -\theta_{q-2} & -\theta_{q-3} & \dots & \dots & -\theta_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\theta_q & -\theta_{q-1} & \dots & -\theta_2 & -\theta_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\theta_q & -\theta_{q-1} & \dots & -\theta_2 & -\theta_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{B}_q \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

ただし、 $\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} \phi_p & \phi_{p-1} & \dots & \phi_1 \\ 0 & \phi_p & \dots & \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \phi_p \end{bmatrix}$

$$\mathbf{B}_q = \begin{bmatrix} \theta_q & \theta_{q-1} & \dots & \theta_1 \\ 0 & \theta_q & \dots & \theta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta_q \end{bmatrix}$$

ここで、 $\mathbf{e}_a$  の分散共分散行列を  $\Omega \sigma_a^2 = E(\mathbf{e}_a \mathbf{e}_a')$  とすると

$$\Omega \sigma_a^2 = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 \Gamma_p & \mathbf{C}' \\ \mathbf{C} & \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \sigma_a^2 \quad (48)$$

ただし、 $\Gamma_p = E[\mathbf{w}_t \mathbf{w}_t']$  : ( $ij$ ) 要素が  $\gamma_{ij}$  の  $p \times p$  行列

$\mathbf{C} = E[\mathbf{a}_t \mathbf{w}_t']$  : ( $ij$ ) 要素が  $\psi_{j-i-p+q}$  ( $j-i-p+q$

$\geq 0$  のとき、それ以外は 0) の  $p \times n$  行列

$$\psi : \psi(B) = \phi^{-1}(B)\theta(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k B^k, \quad \psi_0 = 1$$

となる無限階 MA オペレーターの係数

$\mathbf{w}'$ と  $\mathbf{e}_*$ の同時確率密度関数は次のように表される。

$$p(\mathbf{w}, \mathbf{e}_* | \phi, \theta, \sigma_a) = (2\pi\sigma_a^2)^{-(n+p+q)/2} |\Omega|^{-1/2} \exp\left[\frac{-S(\phi, \theta, \mathbf{e}_*)}{2\sigma_a^2}\right] \quad (49)$$

ただし

$$S(\phi, \theta, \mathbf{e}_*) = (\mathbf{L}_\phi \mathbf{w} - \mathbf{F}\mathbf{e}_*)' \mathbf{L}_\theta^{-1} \mathbf{L}_\theta^{-1} (\mathbf{L}_\phi \mathbf{w} - \mathbf{F}\mathbf{e}_*) + \mathbf{e}_*' \Omega^{-1} \mathbf{e}_*$$

最小二乗理論より、

$$S(\phi, \theta, \mathbf{e}_*) = S(\phi, \theta) + (\mathbf{e}_* - \hat{\mathbf{e}}_*)' \mathbf{D} (\mathbf{e}_* - \hat{\mathbf{e}}_*) \quad (50)$$

$$\text{ただし } S(\phi, \theta) = S(\phi, \theta, \hat{\mathbf{e}}_*) = \hat{\mathbf{a}}' \hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{e}}_*' \Omega^{-1} \hat{\mathbf{e}}_*$$

が無条件二乗和関数になる。

$$\hat{\mathbf{e}}_* = E[\mathbf{e}_* | \mathbf{w}, \phi, \theta] = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}' \mathbf{L}_\theta^{-1} \mathbf{L}_\phi^{-1} \mathbf{L}_\phi \mathbf{w} \quad (51)$$

$$\text{ただし, } \mathbf{D} = \Omega^{-1} + \mathbf{F}' \mathbf{L}_\theta^{-1} \mathbf{L}_\phi^{-1} \mathbf{F}$$

は  $\mathbf{e}_*$ の条件付期待値を表しており、また

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{L}_\theta^{-1} (\mathbf{L}_\phi \mathbf{w} - \mathbf{F}\hat{\mathbf{e}}_*) \quad (52)$$

である。

$$p(\mathbf{w}, \mathbf{e}_* | \phi, \theta, \sigma_a) = p(\mathbf{w} | \phi, \theta, \sigma_a) p(\mathbf{e}_* | \mathbf{w}, \phi, \theta, \sigma_a) \quad (53)$$

より、無条件尤度関数として

$$p(\mathbf{w} | \phi, \theta, \sigma_a) = (2\pi\sigma_a^2)^{-n/2} |\Omega|^{-1/2} |\mathbf{D}|^{-1/2} \exp\left[\frac{-S(\phi, \theta)}{2\sigma_a^2}\right] \quad (54)$$

が得られる。なお  $\sigma_a^2$ の最尤推定量は、

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{S(\hat{\phi}, \hat{\theta})}{n} \quad (55)$$

$\hat{\phi}, \hat{\theta}$  : 最尤推定量

となる。

$$S(\phi, \theta) = \sum_{i=1}^n [a_i]^2 + \hat{\mathbf{e}}_*' \Omega^{-1} \hat{\mathbf{e}}_* \quad (56)$$

の  $[a_i]$ は、

$$\mathbf{L}_\theta [\mathbf{a}] = \mathbf{L}_\phi \mathbf{w} - \mathbf{F}[\mathbf{e}_*] \quad (57)$$

から求まり、初期値として後方予測値  $[\mathbf{e}_*]$ を用いる。 $[\mathbf{e}_*]$ は、

$$\hat{\mathbf{e}}_* = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}' \mathbf{u} \quad (58)$$

$$\text{ただし, } \mathbf{u} = \mathbf{L}_\theta^{-1} \mathbf{L}_\theta^{-1} \mathbf{L}_\phi \mathbf{w} = \mathbf{L}_\theta^{-1} \mathbf{a}^0$$

$\mathbf{u}$ は以下の後方繰返し (backward iteration) 計算により得られる。

$$u_t = a_t^0 + \theta_1 u_{t+1} + \dots + \theta_q u_{t+q} \quad (59)$$

ただし初期値は  $u_{n+1} = \dots = u_{n+q} = 0$

$a_t^0$ は

$$\mathbf{a}^0 = \mathbf{L}_\theta^{-1} \mathbf{L}_\phi \mathbf{w} \quad (60)$$

の要素であり、初期値を  $\mathbf{e}_* = 0$ とした条件付推定値を表している。また、ベクトル  $\mathbf{h} = \mathbf{F}' \mathbf{u}$ は次の  $p+q$ の要素で構成される。

$$h = \begin{cases} \sum_{i=1}^j \phi_{p-j+i} u_i & j = 1, \dots, p \\ -\sum_{i=1}^{j-p} \theta_{q-j+p+i} u_i & j = p+1, \dots, p+q \end{cases} \quad (61)$$

最終的に、

$$\hat{\mathbf{e}}_*' \Omega^{-1} \hat{\mathbf{e}}_* = \hat{\mathbf{a}}_*' \hat{\mathbf{a}}_* + (\hat{\mathbf{w}}_* - \mathbf{C}' \hat{\mathbf{a}}_*)' \mathbf{K}^{-1} (\hat{\mathbf{w}}_* - \mathbf{C}' \hat{\mathbf{a}}_*) \quad (62)$$

を用いると、

$$S(\phi, \theta) = \sum_{i=1}^n [a_i]^2 + (\hat{\mathbf{w}}_* - \mathbf{C}' \hat{\mathbf{a}}_*)' \mathbf{K}^{-1} (\hat{\mathbf{w}}_* - \mathbf{C}' \hat{\mathbf{a}}_*) \quad (63)$$

$$\text{ただし, } \mathbf{K} = \sigma_a^{-2} \Gamma_p - \mathbf{C}' \mathbf{C}$$

$$|\Omega| = |\mathbf{K}|$$

が無条件二乗和関数となる。

以上より、ARIMA過程から生まれる系列  $\mathbf{z}$ に関する尤度関数は次のように表される。

$$L(\phi, \theta, \sigma_a | \mathbf{z}) = (2\pi\sigma_a^2)^{-n/2} |\mathbf{M}_n^{(p,q)}|^{-1/2} \exp\left[\frac{-S(\phi, \theta)}{2\sigma_a^2}\right] \quad (64)$$

ただし、 $S(\phi, \theta) = \sum_{t=1}^n [a_t]^2 + \hat{\mathbf{e}}' \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\mathbf{e}}$ .

$$|\mathbf{M}_n^{(p,q)}| = |\Omega^{-1} \mathbf{D}|^{-1} = |\mathbf{K}|^{-1} |\mathbf{D}|^{-1}$$

さて、ここまでで尤度関数と二乗和関数を示したが、最尤推定の原理により二乗和関数を最小にする方法に基づきパラメータの推定を行うことになる。最小にする二乗和関数は次の通りである。

$$S(\phi, \theta) = \sum_{t=1-q}^n [a_t]^2 + ([\mathbf{w}_\cdot] - \mathbf{C}'[\mathbf{a}_\cdot])' \mathbf{K}^{-1} ([\mathbf{w}_\cdot] - \mathbf{C}'[\mathbf{a}_\cdot]) \quad (65)$$

$[\mathbf{w}_\cdot]' = ([w_{1-p}], [w_{2-p}], \dots, [w_0])$ ,  $[\mathbf{a}_\cdot]' = ([a_{1-q}], [a_{2-q}], \dots, [a_0])$  は次の式で得られる厳密後方予測値である。

$$[\mathbf{e}_\cdot]' = ([\mathbf{w}_\cdot]', [\mathbf{a}_\cdot]')' = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}' \mathbf{u} \quad (66)$$

ベクトル  $\mathbf{u}$  の要素  $u_t$ ,  $t=1, \dots, n$  は初期値を  $u_{n+1} = \dots = u_{n+q} = 0$  として行う後方繰返し計算で得られる。

$$u_t = a_t^0 + \theta_1 u_{t+1} + \dots + \theta_q u_{t+q} \quad (67)$$

なお、 $a_t^0$  は条件付きの値であり、 $a_{1-q}^0 = \dots = a_0^0 = 0$ ,  $w_{1-p}^0 = \dots = w_0^0 = 0$  として下式から得られる値である。

$$a_t^0 = w_t^0 + \phi_1 w_{t-1}^0 + \dots + \phi_p w_{t-p}^0 - \theta_1 a_{t-1}^0 - \dots - \theta_q a_{t-q}^0 \quad (68)$$

厳密な  $[a_t]$  は次の繰返し計算により得られる。

$$[a_t] = [w_t] + \phi_1 [w_{t-1}] + \dots + \phi_p [w_{t-p}] - \theta_1 [a_{t-1}] - \dots - \theta_q [a_{t-q}] \quad (69)$$

以上から(56)式の二乗和関数が計算され、二乗和関数を最小にするパラメータの値の組合せが求めるべきパラメータの推定値となる。

#### 6. 4 診断 (Diagnostic checking)

モデルが時系列データを支配している ARIMA 過程を適切に表していれば、モデルの誤差はホワイトノイズにならなければならない。すなわち、誤差の特性を分析することはモデルの適切さを診断することになる。ただし、誤差の分析は推定値に基づいて行うこととなり、正確には観測値と推定値の差である残差について分析することになる。

診断の最も簡単な方法は、残差のプロットである。Box-Jenkins(1970)の表現を引用するのであれば、「残差プロットを視覚的に調べるのがモデルの診断に際しての第一歩であることをいくら強調しすぎてはならない」

ことはない」。もし残差が真にホワイトノイズであれば、自己相関関数はスパイクを持たず、偏自己相関関数は全てゼロに近い値を取るようになる。先述した Bartlett の公式によれば、個々の自己相関に関する近似的な大標本標準誤差の推定値は、誤差がホワイトノイズに従う場合、

$$SE(r_k) = 1/\sqrt{n} \quad (70)$$

である。

十分に大きなデータに関しては、

$$t_{rk} = \frac{r_k}{SE(r_k)} \quad (71)$$

は正規分布となることが仮定できるので、その有意性について検定を行うことができる。帰無仮説  $H_0$  と対立仮説  $H_1$  をそれぞれ、

$$H_0 : \rho_k = 0$$

$$H_1 : \rho_k \neq 0$$

とすると、5%の有意水準に関して標準正規分布表より1.96を限界値として、

$$|t_{rk}| \geq 1.96 \quad (72)$$

のときは無帰仮説を棄却する。すなわち、

$$|r_k| \geq \frac{1.96}{\sqrt{n}} \quad (73)$$

のとき、残差自己相関は有意にゼロではないことになる。しかし、Box and Pierce(1970)はこの標準誤差推定値は高階のラグの残差自己相関に対してのみ良い近似に過ぎないことを示している。すなわち、残差プロットによる視覚的検定方法は完全に信頼できるものではないが、非常に有益であることも確かである。

残差自己相関によるもうひとつの診断は、Ljung-Box の  $Q$  統計量を用いるものである。

$$Q(K) = n(n+2) \sum_{k=1}^K \frac{1}{n-k} r_k^2 \quad (74)$$

この方法はかばん検定の残差への応用であり、モデルが適切であれば、すなわち誤差がホワイトノイズであれば、 $Q$  は近似的に自由度  $K-p-q-P-Q$  の  $\chi^2$  分布に従う。ただし、 $K$  は計算に用いた残差自己相関の数、 $p$ ,  $q$ ,  $P$ ,  $Q$  はモデルのパラメータの数である。誤差がホワイトノイズであるという仮説は、 $Q$  統計量の値が  $\chi^2$  分布表から得られる臨界値より大きいとき棄却される。

以上の診断方法では複数のモデルが診断基準を満たす

こともありうる。その場合に有益となる診断指標がモデルを区分する適合度の尺度である。その中で最も一般的なものが情報量基準 AIC(Akaike Information Criterion)である。

AIC は統計モデルの予測精度の限界を考慮して、その範囲内で最良のモデルを選択することを目指すものである。統計モデルを用いた分析はデータに含まれる情報を簡潔に表現することが目的のひとつとなっており、このことを節約の原理という。限られたデータをもとに、実際のシステムを把握するためにはデータ数の制約に対応した簡潔なモデルが望まれることを指標として表したものが AIC である。

さて、最尤推定量により定められるモデルである最尤モデルの対数尤度を最大対数尤度という。最尤モデルの平均対数尤度の期待値を期待平均対数尤度といい、この値が大きいモデルは良いと考えられる。一般に最大対数尤度は期待平均対数尤度よりも大きな値を取り、この傾向はモデルの自由パラメータの数が多いほど著しくなる。モデルの最大対数尤度から自由パラメータの数を差し引いた値を近似的に期待平均対数尤度の推定値として以下の式を定義し、この量が AIC である。

$$\text{AIC} = -2 \times (\text{モデルの最大対数尤度}) + 2 \times (\text{モデルの自由パラメータ数})$$

すなわち、

$$\text{AIC} = \sigma_a^2 \exp \left[ \log |\Sigma| + 2 \frac{p+q}{n} \right] \quad (75)$$

$\sigma_a^2 \Sigma$  : 時系列データの分散共分散行列

したがって複数のモデルが残差プロットや Ljung-Box の  $Q$  統計量の診断基準を満たす場合、この AIC 統計量が最も小さいモデルが選択されるべきモデルとなる。

## 6. 5 予測

ARMA( $p, q$ )モデルから生じる実現値  $z_{t+l}$  は次のように表される。

$$z_{t+l} = \phi_1 z_{t+l-1} + \dots + \phi_p z_{t+l-p} - a_{t+l} - \theta_1 a_{t+l-1} - \dots - \theta_q a_{t+l-q} \quad (76)$$

過去の誤差項のみで表すと、次のようになる。

$$z_{t+l} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+l-j} \quad (77)$$

$\psi_j$  : 誤差学習係数 (AR(1)モデルの場合、 $\psi_k = \phi_1^k$ )

$t$  期におけるリードタイム  $l$  の実現値  $z_{t+l}$  の予測値は次のように表される。

$$\hat{z}_t(l) = \psi_1^* a_t + \psi_{l+1}^* a_{t-1} + \psi_{l+2}^* a_{t-2} + \dots \quad (78)$$

式(1)より、

$$E[z_{t+l} - \hat{z}_t(l)]^2 = (1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{l-1}^2) \sigma_a^2 + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_{l+j} - \psi_{l+j}^*)^2 \sigma_a^2 \quad (79)$$

上式は  $\psi_{l+j} = \psi_{l+j}^*$  のとき最小化される。したがって、

$$z_{t+l} = (a_{t+l} + \psi_1 a_{t+l-1} + \dots + \psi_{l-1} a_{t+1}) + (\psi_l a_t + \psi_{l+1} a_{t-1} + \dots) = e_t(l) + \hat{z}_t(l) \quad (80)$$

$e_t(l)$  :  $\hat{z}_t(l)$  の予測誤差

条件付期待値について、

$$E[a_{t+j} | z_t, z_{t-1}, \dots] = 0, \quad j > 0 \quad (81)$$

であることより

$$\hat{z}_t(l) = \psi_1 a_t + \psi_{l+1} a_{t-1} + \dots = E_t[z_{t+l}] \quad (82)$$

したがって、 $t$  期におけるリードタイム  $l$  の最小平均二乗誤差予測値は時刻  $t$  における  $z_{t+l}$  の条件付期待値となる。 $z_{t+l}$  の条件付期待値は  $t$  期までの情報を用いて計算すれば、次のような手順になる。

- ・現在及び過去の誤差項  $a_{t+j}$ ,  $j \leq 0$  を実際の残差に置き換える
  - ・将来の誤差項  $a_{t+j}$ ,  $0 < j \leq h$  をその期待値である 0 に置き換える
  - ・現在及び過去の系列の値  $z_{t+j}$ ,  $j \leq 0$  を実際の観測値に置き換える
  - ・ $z_{t+j}$ ,  $0 < j < h$  の将来値を適当な予測値  $z_t(j)$  で置き換える
- さて、予測を行う場合、最適な点予測値に加えて点予測値の精度を必要とする場合が多くある。このような予測方法を区間推定といい、真の母数の値  $\theta$  がある区間  $(L, U)$  に入る確率を  $1 - \alpha$  ( $\alpha$  は  $\theta$  が区間に入らない確率) 以上になるように保証する方法である。なお、 $L$  を下方信頼限界、 $U$  を上方信頼限界といい、区間  $[L, U]$  を  $100(1 - \alpha)\%$  信頼区間という。

リードタイム  $l$  の予測誤差は、

$$e_t(l) = a_{t+l} + \psi_1 a_{t+l-1} + \dots + \psi_{l-1} a_{t+1} \quad (83)$$

であり、期待値は以下の通りである。

$$E_t[e_t(l)] = 0 \tag{84}$$

すなわち、予測誤差の分散は

$$e_t^2(l) = [z_{t+l} - \hat{z}_t(l)]^2 = \text{var}[e_t(l)] = (1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{l-1}^2) \sigma_a^2 \tag{85}$$

誤差項  $a$  は正規分布に従うと仮定しているため、将来の値  $z_{t+l}$  の条件付確率分布  $p(z_{t+l} | z_t, z_{t-1}, \dots)$  は

$$\text{平均: } \hat{z}_t(l), \text{ 標準誤差: } (1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2)^{1/2} \sigma_a$$

の正規分布に従う。標準化すると、

$$P(-Z_{\alpha/2} \leq \frac{z_{t+l} - \hat{z}_t(l)}{(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2)^{1/2} \sigma_a} \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \tag{86}$$

$Z_{\alpha/2}$ : 標準正規分布  $N(0,1)$  において、その点より上側の確率が  $100 \times \alpha/2\%$  となる点 (パーセント点)

$\sigma_a$  は未知なので、標本分散を不偏分散  $s_a$  の形で用いると、

$$\frac{z_{t+l} - \hat{z}_t(l)}{(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2)^{1/2} s_a}$$

は自由度  $n-1$  の  $t$  分布  $t(n-1)$  に従うから

$$P(-t_{\alpha/2}(n-1) \leq \frac{z_{t+l} - \hat{z}_t(l)}{(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2)^{1/2} s_a} \leq t_{\alpha/2}(n-1)) = 1 - \alpha \tag{87}$$

整理すると

$$P(\hat{z}_t(l) - t_{\alpha/2}(n-1)(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2)^{1/2} s_a \leq z_{t+l} \leq \hat{z}_t(l) + t_{\alpha/2}(n-1)(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2)^{1/2} s_a) = 1 - \alpha \tag{88}$$

したがって予測値の  $100(1-\alpha)\%$  の信頼区間は次のようになる。

$$\left[ \hat{z}_t(l) - t_{\alpha/2}(n-1)(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2)^{1/2} s_a, \hat{z}_t(l) + t_{\alpha/2}(n-1)(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2)^{1/2} s_a \right]$$

### 7. 作成プログラムの概要

本研究では、3章から6章までに説明された各時系列分析手法の全てが選択可能なプログラムを作成した。プログラムの作成には Microsoft Excel 2000 Visual Basic for Application を用いている。ここでは Box-Jenkins 法を例にとり作成プログラムの概要を説明する。

プログラムは図-2の画面からスタートする。

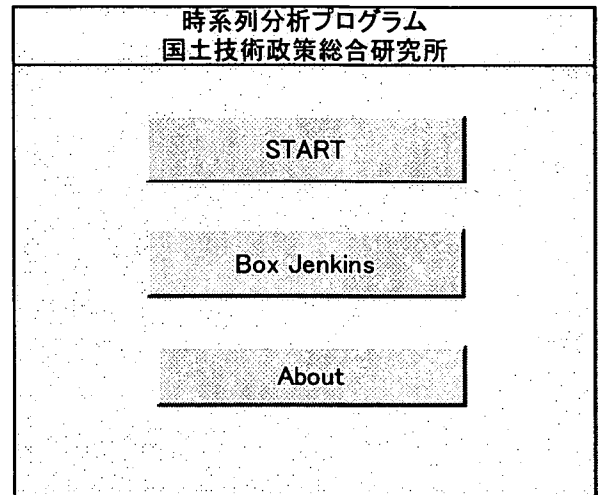


図-2 スタート画面

「Start」をクリックすれば全ての手法が選択可能となるが、「Box-Jenkins」をクリックすれば図-3の画面に移り、Box-Jenkins 法のプログラムが選択される。他の手法については比較的容易であるので、ここからは最も複雑である Box-Jenkins 法の操作手順のみを説明する。

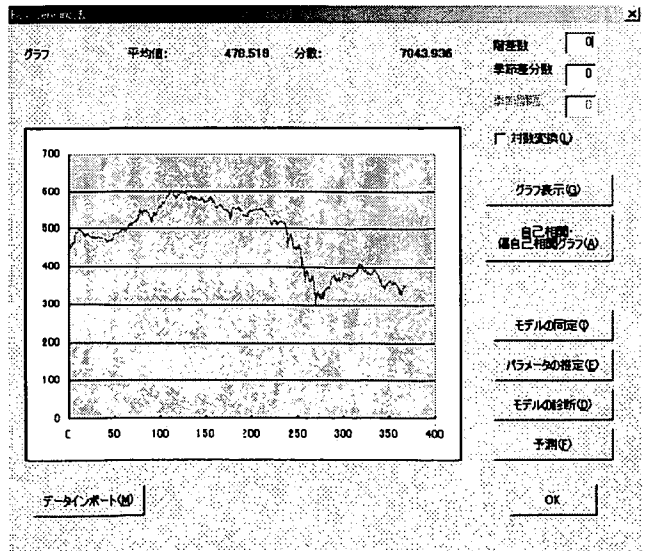


図-3 Box-Jenkins 法のプログラム開始画面

図-3 の画面において適当な階差・季節差分の階数や対数変換の有無を選択し、「自己相関・偏自己相関グラフ」をクリックすると定常化されたと思われるデータの自己相関、偏自己相関のプロットが図-4 のように描かれる。

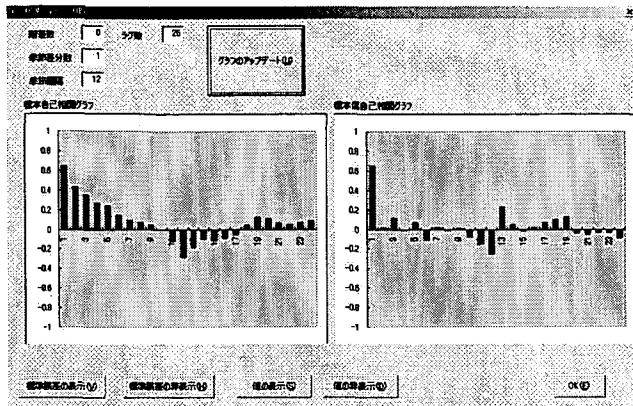


図-4 自己相関，偏自己相関のプロット

図-4 の画面で「標準誤差の表示」をクリックすると、6章で述べた Bartlett の近似式による自己相関の標準誤差と Quenouille の近似式による偏自己相関の標準誤差が描かれるようになっており、どのラグで非ゼロの値を取るかを視覚的に判断できるようになっている。

図-3 の画面に戻り、「モデルの同定」をクリックすると図-5 のような画面に移る。図-4 でプロットされた自己相関、偏自己相関の特徴がいかなるモデルの特徴に類似しているかを検討し、候補となる(最大5種類の)モデルのパラメータの次数 (p, d, q, P, D, Q, S) を入力し「OK」をクリックすると図-6 の画面に移る。

図-5 モデルの同定

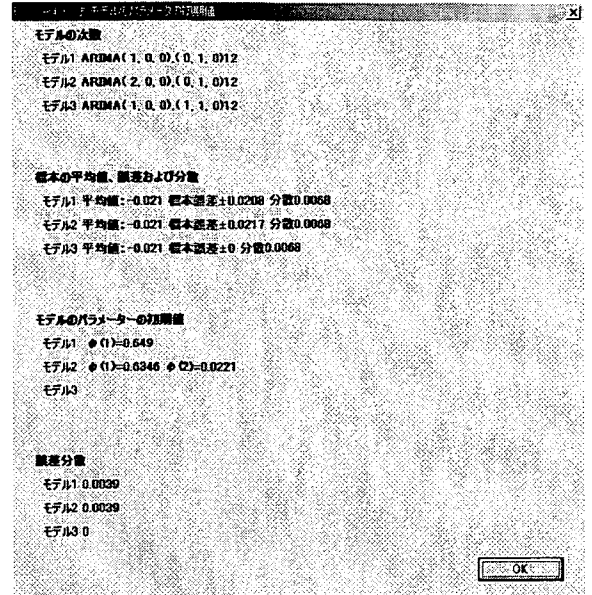


図-6 モデルの統計量とパラメータの初期値

図-6 の画面には、モデルの要約型、標本の平均値・標本誤差・分散、モデルパラメータの初期値、誤差分散が表示される。モデルパラメータの初期値とは、パラメータの推計の際に初期値として用いる値である。この値の計算法については、参考文献を参照されたい。

「OK」をクリックすると図-3 の画面に戻り、「パラメータの推定」をクリックすると図-7 の画面に移る。

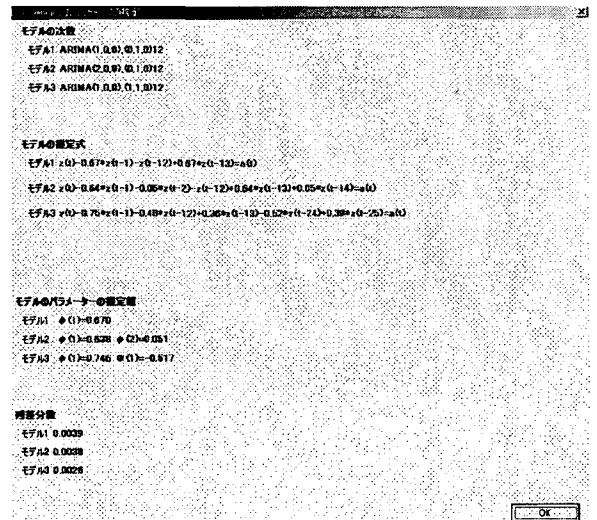


図-7 パラメータ推定結果

図-7 の画面には選択した各モデルのパラメータの推定結果が示される。

「OK」をクリックすると図-3 の画面に戻り、「モデルの診断」をクリックすると図-8 の画面に移る。



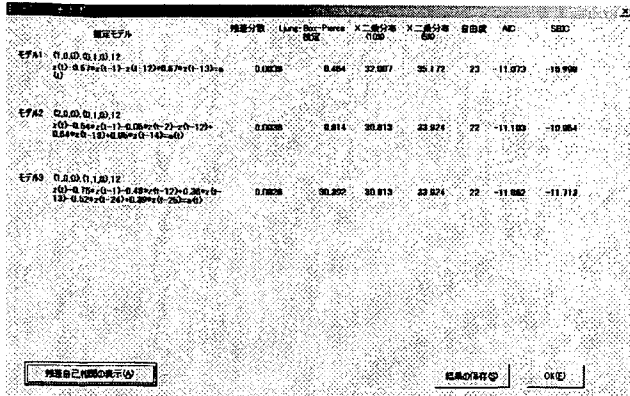


図-8 診断結果

図-8の画面では選択した各モデルのLjung-BoxのQ統計量、 $\chi^2$ 乗分布の臨界値、AIC等の診断結果が表示される。

「残差自己相関の表示」をクリックすると図-9の画面に移り、残差自己相関がプロットされる。

以上の過程により最終的に選択するモデルを決定し、図-3の画面の「予測」をクリックすると、図-10のように予測結果が信頼限界と共にプロットされる。

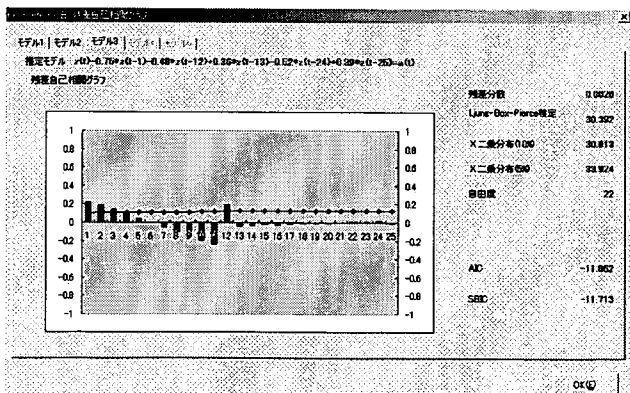


図-9 残差自己相関のプロット

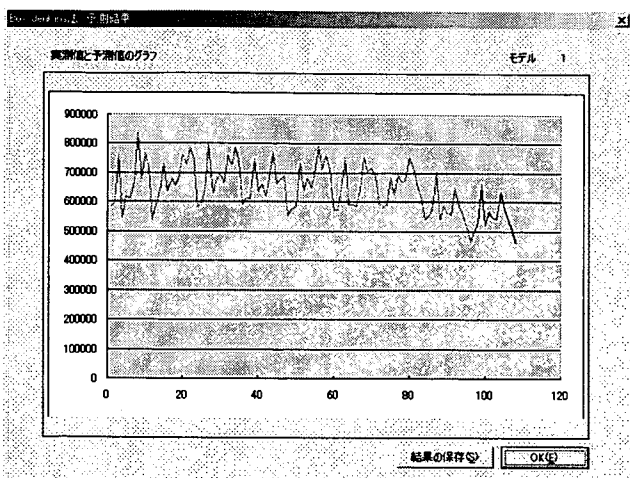


図-10 予測結果

## 8. 航空関連需要分析の試行結果

ここでは試行的航空需要分析として、以下の時系列データの分析を行う。

- ・月別国内航空旅客数
- ・月別国内航空貨物量
- ・関西国際空港の月別国際航空旅客
- ・関西国際空港の月別国際貨物量
- ・月別国内幹線旅客数
- ・月別国内ローカル線旅客数
- ・月別羽田-札幌路線旅客数
- ・月別羽田-福岡路線旅客数
- ・月別羽田-那覇路線旅客数

国内データについては1992年から2001年までの10年間120個のデータを用いてモデルを構築し、1年先までの予測を行った。関西国際空港のデータについては1995年から2001年までの7年間84個のデータを用いてモデルを構築し、同じく1年先までの予測を行った。表-3には、モデル選択の根拠である複数モデルの診断結果を示す(国内航空旅客のみ)。また予測結果を図-11~19に示す。

表-3 診断結果 (国内航空旅客)

モデル	残差分散	Q検定量	自由度	$\chi^2$ 乗分布(5%)	AIC
$(1,0,0) \times (0,1,0)_{12}$	0.0015	0.495	23	35.172	-12.924
$(1,1,0) \times (0,1,0)_{12}$	0.0014	21.662	22	33.924	-13.062
$(1,1,0) \times (1,1,0)_{12}$	0.0012	43.001	21	32.671	-13.289
$(0,0,1) \times (0,1,1)_{12}$	0.0017	39.497	22	33.924	-12.594
$(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$	0.001	17.738	21	32.671	-13.654

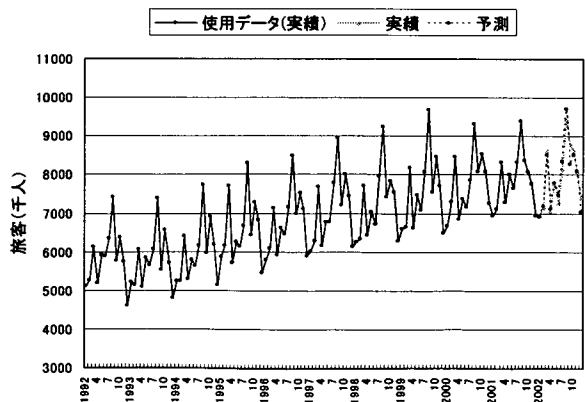


図-11 国内航空旅客

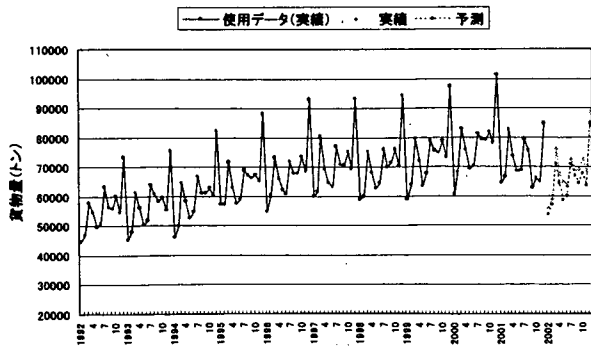


図-12 国内航空貨物

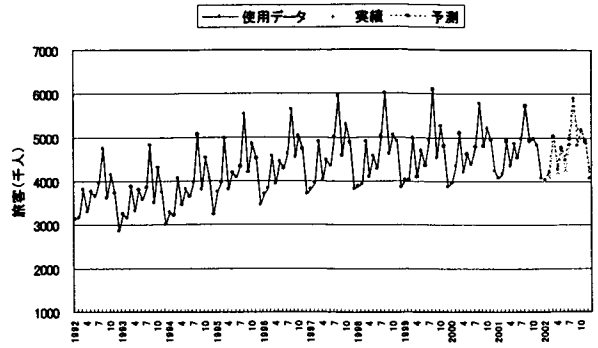


図-16 国内ローカル線旅客

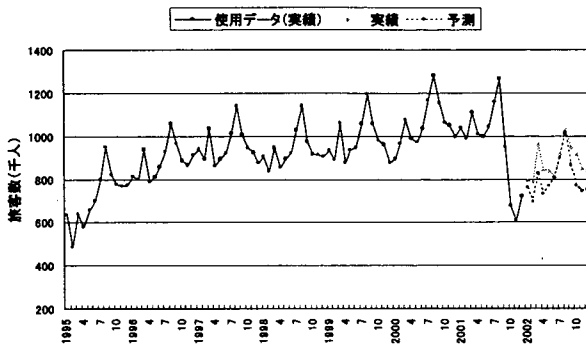


図-13 関西国際空港の国際航空旅客

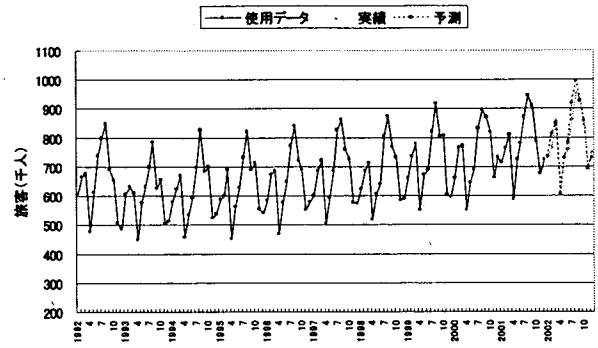


図-17 羽田-札幌路線旅客

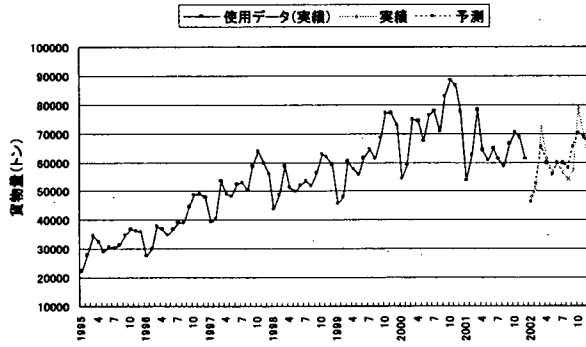


図-14 関西国際空港の国際航空貨物

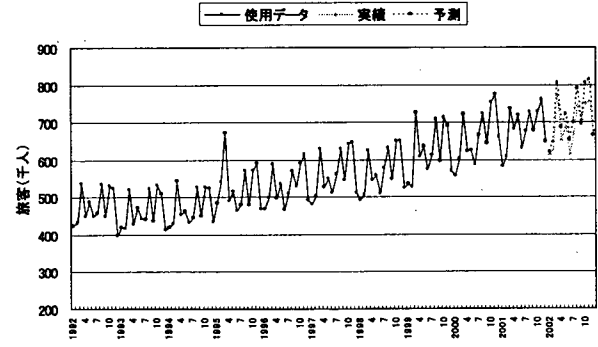


図-18 羽田-福岡路線旅客

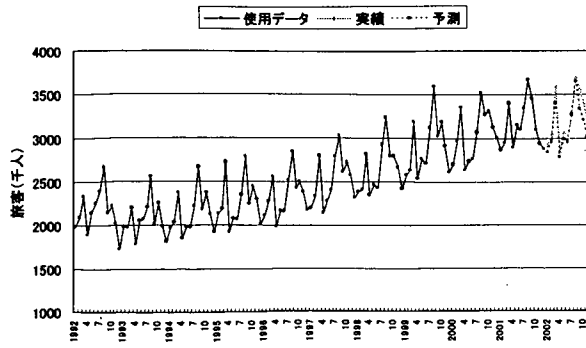


図-15 国内幹線旅客

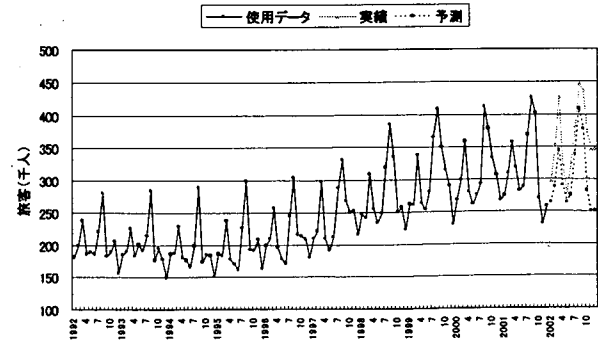


図-19 羽田-沖縄路線旅客

表-3を見ると、ARIMA(1,1,0)×(1,1,0)<sub>12</sub>、ARIMA(0,0,1)×(0,1,1)<sub>12</sub>についてはQ検定量が $\chi^2$ 二乗分布の臨界値を超えているので候補から外れる。残る3つのモデルのうち最もAICの小さなモデルを最終的に選択している。このように診断することにより、各データともARIMA(0,1,1)×(0,1,1)<sub>12</sub>が選択される結果となった。

図-11～19を見ると、いずれの予測結果についても比較的良好であると思われる。特に、関西国際空港の国際旅客及び国際貨物得量は米国の9.11テロの影響で2001年に大きな落ち込みを見せており、かつそのデータを予測に使用しているにもかかわらず、2002年の予測はかなり実績と近くなっている。

## 9. まとめ

本研究では、季節変動特性の考慮と短期予測の確実性という目的意識から、Box=Jenkins法を中心とした時系列分析の作成を行った。ここではその適用性について検討する。

まず、航空関係データは季節変動の大きなものが多く、本研究で作成したプログラムの適用範囲は広いと考えられる。実際、8章で用いた4種類のデータのプロット結果を見れば季節変動の大きさは一目瞭然であろう。日本全体の旅客・貨物量と個別空港の旅客・貨物量のいずれも季節変動は大きい。すなわちデータ特性を踏まえると、ミクロな対象からマクロな対象のいずれもカバーできることになる。

さらに関西国際空港のデータ分析結果から、時系列分析の特徴として、このように大きな変化が生じた後の短期予測には極めて適用性が高いことが挙げられる。今回用いたデータは米国の9.11テロの影響を大きく受けている2001年までのものであるが、2002年以降の復調ぶりが結果に表れ、実績ともかなり近い値を取っている。こういったケースは、通常用いられる回帰モデルでは表現不可能である。

航空旅客あるいは航空貨物の需要予測は一般的に四段階推計法に基づいて行われる。第一段階である生成量の推定には、経済指標やサービスレベルを説明変数とした重回帰分析が用いられる。したがって、急激かつ一時的な変化への適応性は低い。また回帰分析は季節変動のあるデータから季節変動特性を取る形で将来値が得られるため、季節変動特性は無視される。こういった点で時系列分析の必要性が高まるものと考えられる。

そもそもBox=Jenkins法による予測値は、理論的には最新データに強く影響される。したがって、経済指標やサービスレベルを説明変数とした重回帰分析により生成量を推定する現状の航空需要予測モデルと比較し、短期予測に

おいてはその精度が高まることになる。こういった点で本研究の優位性が明らかになる。

今回は試行的に一部のデータを分析するに留まっているが、今後さらに分析を進めることにより、時系列分析の使用範囲が決定され、拡大されていくものと考えられる。例えば経営方針や施設計画への反映など、行政における活用も大いに期待されるところである。

(2003年8月31日受付)

## 参考文献

- 広松毅・浪花貞夫 (1990)：経済時系列分析，朝倉書店  
 東京大学教養学部統計学教室編 (1991)：統計学入門，東京大学出版社  
 A.C.Harvey (1981)：TIME SERIES MODELS，国友直人／山本拓訳，時系列モデル入門，東京大学出版会  
 Walter Vandaele (1983)：Applied Time Series and Box-Jenkins Models，蓑谷千風彦／広松毅訳，時系列入門，多賀出版  
 George E. P. Box, Gwilym M. Jenkins, Gregory C. Reinsel (1994)：Time Series Analysis: Forecasting and Control THIRD EDITION, Prentice-Hall International, Inc  
 Philip Hans Franses (1998)：Time Series Models for Business and Economic Forecasting, Cambridge University Press  
 Peter J. Blockwell, Richard A. Davis (2002)：Introduction to Time series and Forecasting Second Edition, Springer Texts in Statistics

---

国土技術政策総合研究所資料

TECHNICAL NOTE of NILIM

No.129            December 2003

編集・発行    ©国土技術政策総合研究所

---

本資料の転載・複写のお問い合わせは

〔 〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬3-1-1  
管理調整部企画調整課    電話:046-844-5018 〕